

Algèbre linéaire

MATH-111(f)

Chapitre 1 | Systèmes d'équations linéaires (SEL)

10.09.24

Cette séance: • déf. de SEL, l'écrire de façon matricielle

• types de SEL $\rightarrow$ incompatible

compatible $\rightarrow$ déterminé
 $\rightarrow$ indéterminé

• notation de SEL équivalents et les opérations élémentaires sur les lignes.

§ 1.2 + 1.3 (début) Généralités

Déf 1.2 | Un SEL en les variables $x_1, \dots, x_n$ est une famille d'équations

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ \vdots \\ L_m \rightarrow \end{array} \quad (*) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$
coefficient second membre

On dit que le SEL est de taille $m \times n$.

$\uparrow$ $\uparrow$
lignes # variables

Déf 1.4 | Pour (*), une solution est un n -uplet $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$
tel que $\begin{cases} a_{1,1}s_1 + \dots + a_{1,n}s_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + \dots + a_{m,n}s_n = b_m \end{cases}$ sont vérifiées.

Déf. 1.4 (suite) On note $S_{(*)}$ l'ensemble de toutes les solutions de $(*)$.

$(*)$ $\begin{cases} \rightarrow \text{incompatible si } S_{(*)} = \emptyset \\ \rightarrow \text{compatible si } S_{(*)} \neq \emptyset \end{cases}$

$\begin{cases} \rightarrow \text{déterminé si } \#(S_{(*)}) = 1 \\ \rightarrow \text{indéterminé si } \#(S_{(*)}) > 1 \end{cases}$

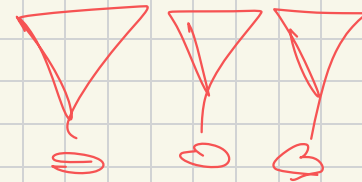
Exemple 1.5 $(*) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{incompatible ?}$

Exemple 1.6 $(*) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow x_1 = 1 - x_2$

Toute solution de $(*)$ est $(1 - x_2, x_2)$ avec $x_2 \in \mathbb{R}$ q.c.g.

i.e. $S_{(*)} = \{ (1-s, s) : s \in \mathbb{R} \} \ni \underbrace{(1, 0)}_{s=0}, \underbrace{(0, 1)}_{s=1}, \underbrace{(-1, 2)}_{s=2}, \dots$

On va écrire $\in, \ni, \psi, \cap, \dots$



Exemple A (*) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = -3, \end{cases}$

→ S.E.L. compatible déterminé
et $S(x) = \{(1, 2)\}$

On fait $L_1 - L_2$:

$$2x_1 = (-1) - (-3) = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

D'après L_2

$$1 + 2x_2 = -3 \Rightarrow 2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -2 \quad \square$$

Thm 1.7 Soit (*) on S.E.L. Si $\#(S(x)) > 1$, alors $S(x)$ est infini.
"quantité d'éléments de $S(x)$ est > 1 "

(Preuve) Voir polycopié. $\square$

Déf 1.12 É.d.un S.E.L. (*), on définit

(Abrégée)

(O.E.L.I) On échange les lignes L_i et L_j

(O.E.L.II) On multiplie L_i par $\lambda \neq 0$

(O.E.L.III) On remplace L_i par $L_i + \lambda L_j$ avec $j \neq i, \lambda \in \mathbb{R}$

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

opérations élémentaires sur
les lignes (O.E.L.)

On dit que deux SEL (*) et (*)' sont équivalents (selon les lignes) si l'on peut passer de (*) à (*)' à partir d'une suite finie d'OEL:

$$(*) \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_p} (*)'$$

Rq .A

Toutes OEL sont inversibles et les opérations inverses sont aussi des OEL:

$$(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = L_i \leftrightarrow L_j$$

$$(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$$

$$(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = \quad ?? \quad (\text{exo})$$

Thm 1.14

Soient (*) et (*)' deux SEL équivalents.

$$\text{Alors } S(*) = S(*)'.$$

(Preuve) Exercice $\rightarrow$ montrer que $(\text{OEL.I}) - (\text{OEL.III})$ préservent l'ensemble de solutions $\square$

Exemple 1.15

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 6x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{aligned} & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ & \rightarrow \\ & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{aligned} \begin{cases} \cancel{0x_1} - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ \cancel{0x_1} + 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{cases} x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{aligned} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & \rightarrow \end{aligned} \begin{cases} x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \cancel{0x_2} - 3x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Alors}} \begin{aligned} & x_3 = -\frac{7}{3} \xrightarrow{L_1} x_2 = -1 - \frac{7}{3} = -\frac{10}{3} \\ & \xrightarrow{L_2} x_1 = -2\left(-\frac{10}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{3} \end{aligned} \end{aligned}$$

- ① ans cette séance on va voir :
- (i) matrice + matrice augmentée ← associées à un SFL
 - (ii) Coefficient principal d'une ligne
 - (iii) matrice échelonnée et échelonnée réduite
 - (iv) variables libres et liées
 - (v) méthode de Gauss-Jordan (idée)

§ 1.5. [Déf 1.6] Matrice = tableau $\rightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ } m lignes
n colonnes

Pour un SFL
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

on associe $\rightarrow$ matrice :

$\rightarrow$ matrice
augmentée

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

| SLOGAN |

SFL = Matrice augmentée

[Déf 1.12] Les OEL pour SFL s'appliquent aussi à des matrices / matrices
augmentées.

Exemple 1.15 (suite) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases} \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array} \right).$

Déf 1.18 La taille d'une matrice est # lignes $\times$ # colonnes

Le coefficient principal de la i -ème ligne de $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$, s'il existe, est le premier coefficient non nul.

Une matrice A est échelonnée si:

(ECH.1) Toute ligne en dessous d'une ligne nulle est aussi nulle

(ECH.2) Si L_i et L_j sont deux lignes de A avec $i < j$, a_{i,p_i} est le coefficient principal de L_i , a_{j,p_j} est le coefficient principal de L_j , alors $p_i < p_j$.

$$\begin{matrix} L_i \\ L_j \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i,p_i} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{j,p_j} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ p_i -ème colonne $\uparrow$ p_j -ème colonne

Exemple

$$\begin{matrix} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple C

$$L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow A =$$

échelonnéé ✓

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est échelonnéé
X

Déf. 1.26

Une matrice A est échelonnée réduite si elle est échelonnéé et (E.R.)

- (ECH.3) tous les coefficients principaux valent 1;
 - (ECH.4) si la colonne C_k de A inclut un coefficient principal d'une ligne L_i de A , alors les autres coefficients dans la colonne sont nuls.
- Pivot = coefficient principal d'une matrice E.R.

Exemple C (suite)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas échelonnée

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée mais pas réduite

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée réduite

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée mais pas réduite

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 11/8 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4}L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 11/8 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on peut passer de A vers la FER à partir d'une suite finie d'OEL.

[Thm. 1.21 + 1.29]

Toute matrice A de taille $m \times n$ est ligne-équivalente à

une [unique] matrice échelonnée réduite.

← Forme échelonnée réduite de A
FER

Exemple 1.25* (*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pivots

- Pour matrices non nulles:
- (1) Choisir une ligne avec le coeff. principal le plus à gauche possible (et si c'est 1, c'est mieux)
 - (2) Éliminer les autres coefficients dans la même colonne avec des (OEL.III)
- ...

$\leadsto \begin{cases} x_1 - 4x_3 = 16 \\ x_2 + 3x_3 = -11 \end{cases}$

↑
variables liées

$\leadsto \begin{cases} x_1 = 16 + 4x_3 \\ x_2 = -11 - 3x_3 \end{cases}$

↑
variable libre

$\leadsto \text{Sol} (*) = \begin{pmatrix} 16 + 4x_3 \\ -11 - 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R}$

↑
 x_2

Def (p.3) Pour un SFL $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$

$\leadsto$ les variables liées sont celles indexées par les colonnes incluant les pivots de la FIER de la matrice augmentée associée.

Les autres variables sont appelées libres.

SLOGAN La FIER d'une matrice augmentée permet de décrire toutes les sol. du SFL associé: chaque variable liée en fonction des variables libres.

Exemple 1.25 Résoudre

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

(voir notes manuscrites pour la solution)

Chapitre 2 | Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

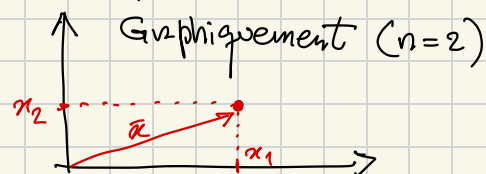
(17.09)

Dans cette séance on va apprendre:

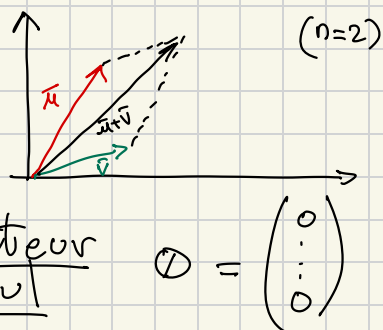
- (i) à exprimer un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs;
- (ii) la notion de famille libre et liée;
- (iii) la notion de partie engendrée par une famille de vecteurs;
- (iv) la notion de produit entre une matrice $n \times n$ et un vecteur de $\mathbb{R}^n$;
- (v) la forme vectorielle d'un SFL.

§ 2.1. [Déf (p.19)] Vecteur = vecteur colonne est un uplet $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que l'on va écrire

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$



Somme: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$



Vecteur nul $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

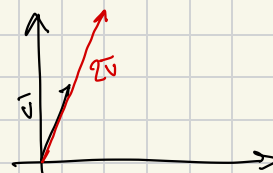
Égalité:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ssi } x_i = y_i \forall i \in [1, n]$$

$[a, b] = \{n \in \mathbb{Z} : a \leq n \leq b\}$

Multiplication par scalaire

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$



Vecteur opposé

$$-\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Prop. 2.1 $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{ on a}$

- $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$
- $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$
- $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$
- $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$
- $(\lambda\mu)\bar{x} = \lambda(\mu\bar{x})$

Preuve Exercice

Déf 2.4 On dit que $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} = \lambda\bar{y}$ ou $\bar{y} = \lambda\bar{x}$.

Question $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires? Réponse: Oui! $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

§ 2.3. Combinaison linéaire et partie engendrée

Déf 2.7 I.d. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, une combinaison linéaire (CL) des éléments de $\mathcal{F}$ est $\bar{v} = \lambda_1\bar{v}_1 + \dots + \lambda_k\bar{v}_k$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ coefficients de la C.L.

Exemple 2.9 $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\bar{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Question: $\bar{w}$ est-il une C.L. de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$?

Si oui, il doit exister $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 3 \end{cases}$$

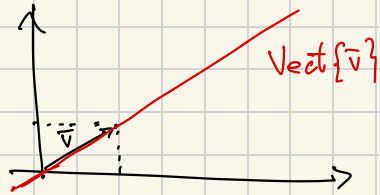
Alors $\alpha_2 = -3$ (L₃)
 $\Rightarrow \alpha_1 = 3/2$ (L₂) mais $(-3) \cdot \frac{3}{2} + (-3) \neq 4 \nabla \leadsto$ ce S.E.L incompatible $\Rightarrow \bar{w}$ n'est pas une CL de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$.

Déf 2.11 É.d. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, la partie de $\mathbb{R}^n$ engendrée par $\mathcal{F}$ est
 (sous-espace vectoriel engendré)

$$\text{Vect } \mathcal{F} = \text{Vect} \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = \{ \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \} \quad (\leftarrow \text{span } \mathcal{F})$$

Exemple 1 $\bar{v} \neq 0$ (dans $\mathbb{R}^2$)

$$\text{Vect} \{ \bar{v} \} = \text{droite engendrée par } \bar{v} = \{ \lambda \bar{v} : \lambda \in \mathbb{R} \}$$



§ 2.4. Famille libre et liée

Déf 2.16 Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée (ou linéairement dépendante) s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = 0 \quad \text{et il existe au moins un } \lambda_i \neq 0.$$

Une famille est libre (ou linéairement indépendante) si elle n'est pas liée.

Questions De quelle façon équivalente on peut dire que $\mathcal{F}$ est libre:

(i) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = 0$ ✗

(ii) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = 0$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ ✓

(iii) $0 \bar{v}_1 + \dots + 0 \bar{v}_k = 0$ ✗ (iv) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul, alors $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k \neq 0$ ✓

Question $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre? $\leftarrow$ Non! $0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\neq 0}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nabla$

Exemple 2.18 $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \longrightarrow$ libre?

(I) $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ libre} \iff$ la seule possibilité est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$(*) \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ -3 & 5 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 5 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 14 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 14 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*)' \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 14L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Δ lors $\mathcal{F}$ est libre. $\square$

Thm 2.20 Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée ss'il existe $i \in [1, k]$ t.q.

$\bar{v}_i$ est C.L. des vecteurs $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_k$.

$\Leftarrow$ Exo.

(Preuve) $\Rightarrow$ Si $\mathcal{F}$ liée, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ avec au moins un non nul (i.e. $\exists i \in [1, k]$ t.q. $\lambda_i \neq 0$)

t.q. $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \vec{0}$

$$= (\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \bar{v}_{i-1}) + \lambda_i \bar{v}_i + (\lambda_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \lambda_k \bar{v}_k) \implies \bar{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \bar{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \bar{v}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \bar{v}_k \quad \checkmark \quad \square$$

Chapitre 3 Formes vectorielles des SIL

§ 3.1 + 3.2 Généralités

Déf 3.1 Si $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$, on notera $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$.

Pour $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on définit $A \cdot \bar{x} := x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Lemme 3.2 Pour une matrice A de taille $m \times n$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$A \cdot (\bar{x} + \lambda \bar{y}) = A \bar{x} + \lambda A \bar{y}.$$

(Preuve) $A(\bar{x} + \lambda \bar{y}) = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} = (x_1 + \lambda y_1) \bar{a}_1 + \dots + (x_n + \lambda y_n) \bar{a}_n = (x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n) + \lambda (y_1 \bar{a}_1 + \dots + y_n \bar{a}_n) = A \bar{x} + \lambda A \bar{y}.$

Point
clé

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{def } uv} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

← forme vectorielle
du SIL (*)

19.09

Dans cette séance du cours, on va apprendre

- (i) la notion de SFL homogène et inhomogène;
- (ii) la notion de solution triviale d'un SFL homogène;
- (iii) le lien entre SFL homogènes et familles libres/liées;
- (iv) le lien entre $S_{(*)}$ pour $(*)$ SFL inhomogène et $S_{(*)_h}$ pour $(*)_h$ SFL homogène;
- (v) la notion d'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, image, préimage (ou image inverse) et le lien avec les SFL.

§ 3.3. SFL homogènes et inhomogènes

Déf 3.3 Un SFL (écrit sous forme matricielle) $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$
 est dit $\begin{cases} \rightarrow \text{homogène si } b=0 \text{ (i.e. } A\bar{x}=0) \\ \rightarrow \text{inhomogène si } b \neq 0 \text{ (i.e. } A\bar{x}=\bar{b} \text{ avec } b \neq 0) \end{cases}$

matrice $m \times n$ $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^m$

Rq. D Un SFL homogène $A \cdot \bar{x} = 0$ admet au moins une solution $\rightarrow$ c'est la solution triviale $\bar{x} = \mathbf{0}$.

Exemple 3.7* (modifiée) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pivots $\rightarrow$ variables liées: x_1, x_2

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Alors $S(*) = \left\{ \begin{pmatrix} -3+x_3 \\ 1-2x_3-x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3-x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$\uparrow$
sol. de ∇
 $A\bar{x} = b$

$\uparrow$
sol. de ∇
 $A\bar{x} = 0$
(*)

Point
clé

Pour $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$

$$\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \text{ liée} \iff [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \cdot \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m} \quad \text{admet une solution non triviale}$$

(Preuve) $\Rightarrow$ Si $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ liée, alors $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul et tels que

$$x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m} \xrightarrow[\text{aussi}]{\text{écrit}} [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m}$$

Comme $\bar{x} \neq 0$ vu qu'une composante de $\bar{x}$ est non nulle
 $\downarrow$
 $\bar{x}$ est sol. non triviale de $A\bar{x} = 0$.

$\Leftarrow$) Il faut renverser ces implications (exo). $\square$

Application $\rightarrow$ **Thm 3.9** Soit $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$. Si $p > m$, alors $\mathcal{F}$ est liée.

(Preuve) Soit $A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p]$. $\leadsto A \cdot \bar{x} = 0$ admet sol. non triviale ssi $\bar{v}$ est liée.

On va donc calculer la FER de

$$\left[A \mid 0 \right] = \left[\underbrace{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p}_{\substack{p \text{ colonnes} \\ m \text{ lignes} \ \& \ p > m}} \mid 0 \right]$$

$\rightarrow$ alors au moins une colonne ne contient pas de pivot

$\leadsto$ alors il y a au moins une variable libre

$\Rightarrow$ les SEL $A \cdot \bar{x} = 0$ admet une infinité de sol $\Rightarrow$ on a une solution non triviale $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ est liée. $\square$

Thm 3.10 Soit $(*) A \bar{x} = \bar{b}$ un SEL inhomogène et soit $(*)_h A \cdot \bar{x} = 0$ le SEL homogène associé. Soit $\bar{v}_{\text{par}} \in \mathbb{R}^n$ une solution de $(*)$. Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \bar{v}_{\text{par}} + \bar{v}_h : \bar{v}_h \in S_{(*)_h} \right\}.$$

(Preuve) $\supseteq$ Si $\bar{v}_h \in S_{(*)_h}$, alors $A \cdot (\bar{v}_{\text{par}} + \bar{v}_h) = \underbrace{A \bar{v}_{\text{par}}}_{=\bar{b}} + \underbrace{A \cdot \bar{v}_h}_{=0} = \bar{b} \Rightarrow \bar{v}_{\text{par}} + \bar{v}_h \in S_{(*)}$.

$\subseteq$ Soit $\bar{v} \in S_{(*)}$, i.e. $A \bar{v} = \bar{b}$. On écrit $\bar{v} = \bar{v}_{\text{par}} + (\bar{v} - \bar{v}_{\text{par}})$ et

$A \cdot (\bar{v} - \bar{v}_{\text{par}}) = A \bar{v} - A \bar{v}_{\text{par}} = \bar{b} - \bar{b} = 0$, i.e. $\bar{v} - \bar{v}_{\text{par}} \in S_{(*)_h}$. $\leadsto \bar{v} \in S_{(*)}$ $\square$

Exemple 3.11 $(*) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -9 \end{cases}$

Admettons que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est sol. particulière.
Trouver toutes les sol. de $(*)$.

Par la méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow (-\frac{1}{5})L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivots : variables liées x_1, x_2

i.e. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow S(x_h) = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Thm 3.10.

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow S(*) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \square$$

synonyme de fonction

par

§ 3.4. Applications linéaires

Déf 3.13 Une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite linéaire si $T(\bar{v} + \lambda \bar{w}) = T(\bar{v}) + \lambda T(\bar{w})$
pour tous $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cette déf et celle des notes de Sacha sont équivalentes (exercice).

Exemple E Par le Lemme 3.2, si A est matrice $m \times n$, alors l'application

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

est linéaire.

→ En fait "toutes" les applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont comme ça (à venir)

Exemple F L'application $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

est linéaire, car

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ x_3 + \lambda y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_2 + \lambda y_2) - 5(x_3 + \lambda y_3) \\ (x_1 + \lambda y_1) + (x_3 + \lambda y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 + \lambda(2y_2 - 5y_3) \\ (x_1 + x_3) + \lambda(y_1 + y_3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2y_2 - 5y_3 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Sinon: $T = T_A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire? (Exemple 3.16)

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Réponse: Non, car

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Propriété Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire, $T(0) = 0$

(Preuve) $T(0) = T(0+0) = T(0+1 \cdot 0) \stackrel{T \text{ lin.}}{=} T(0) + 1 \cdot T(0) = T(0) + T(0)$

i.e. ~~$T(0) = T(0) + T(0)$~~ $\Rightarrow T(0) = 0$ $\square$

Déf 3.12 Pour une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on définit l'image de T via

$$\text{Img}(T) := \{ \bar{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \bar{w} = T(\bar{v}) \} = \{ T(\bar{v}) : \bar{v} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

($\text{Im}(T)$ dans les notes de Sacha)

On rappelle aussi que $\bar{w} = T(\bar{v})$ s'appelle image de $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ par T
et $\bar{v}$ s'appelle image inverse de $\bar{w} \in \mathbb{R}^m$ par T.
(ou préimage)

noter que le mot image a deux significations différentes.

Déf. A (rappel) Pour application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et parties $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^m$ on définit

$$\begin{aligned} T(S) &:= \{ \bar{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \bar{v} \in S \text{ t.q. } T(\bar{v}) = \bar{w} \} \\ &= \{ T(\bar{v}) : \bar{v} \in S \} \end{aligned}$$

$$T^{-1}(S') := \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{v}) \in S' \}$$

image (directe) de S par T $\rightsquigarrow \text{Img}(T) = T(\mathbb{R}^n)$

image inverse (ou préimage, ou image réciproque) de S' par T

Dans ce langage : $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad \equiv \quad T_A(\bar{x}) = \bar{b}$

$(*)$ est compatible $\equiv \quad \bar{b} \in \text{Img}(T_A)$

$$S(*) = T_A^{-1}(\{\bar{b}\})$$

$$S_{(*)_h} = \underline{T_A^{-1}(\{\emptyset\})} \quad \leftarrow \text{noyau de } T_A \text{ (à venir)}$$

Chapitre 4 | Espaces vectoriels

(24.09)

Dans cette séance :

- déf. d'espace vectoriel (EV) + exemples
- déf. de sous-espace vectoriel
- déf. de famille libre/liee et partie engendrée } déjà vu pour $\mathbb{R}^n$
- déf. de combinaison linéaire

§ 4.2. Espaces vectoriels

Déf. 4.2 Un espace vectoriel (EV) est un ensemble non vide V muni de deux applications

$$V \times V \longrightarrow V \\ (v, w) \longmapsto v + w$$

(somme ou
addition)

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V \\ (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

(multiplication/produit
par des scalaires)

qui satisfont aux propriétés :

(EV.1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (commutativité)

(EV.2) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$ (associativité)

(EV.3) $\exists$ un élément $0_V \in V$ tel que $u + 0_V = u, \forall u \in V$ (0_V = vecteur ou neutre nul de V)

(EV.4) $\forall u \in V, \exists$ un élément $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0_V$ ($-u$ = vecteur opposé de u)

(EV.5) $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v, \forall c \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$

(EV.6) $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u, \forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u \in V$

(EV.7) $(c.d).u = c.(d.u), \forall c,d \in \mathbb{R}, \forall u \in V$ (associativité mixte)

(EV.8) $1.u = u, \forall u \in V$.

Désormais $\rightarrow$ vecteur = élément d'un espace vectoriel!

Exemple 9 (1) $V = \mathbb{R}^n$ avec la somme $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et le produit $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ & $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

est un espace vectoriel?

(S,T: $S \times T = \{(s,t) : s \in S \text{ et } t \in T\}$ produit cartésien)

(2) $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ applications}\}$ muni de $V \times V \xrightarrow{\text{somme}} V$ & $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{\text{produit}} V$
 $(f,g) \mapsto f+g$ & $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$

données par

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ & $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
 est un espace vectoriel. (exercice 1, série 3) avec 0_V est la fonction nulle: $x \mapsto 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 et $(-f)(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(3) On rappelle qu'une fonction polynomiale $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application telle qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \forall t \in \mathbb{R}$.
 (ou polynôme)
 Coefficients de f

Fait $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m, \forall t \in \mathbb{R}$ ssi $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$
 (Noter que $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + 0.t^{n+1} + 0.t^{n+2} + \dots + 0.t^m$ si $n < m$)

Déf: $\mathbb{P} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction polynomiale} \}$. Si $f = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$
 $\Rightarrow \deg(f) = n$
 $\deg(0) = -\infty$
 $0 = 0 + 0t + 0t^2 + \dots + 0t^n + \dots$

On voit que $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P} \subseteq \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction} \}$

Avec la somme et le produit par des scalaires de $\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions} \}$, on voit que $\mathbb{P}_n$ et $\mathbb{P}$ sont des espaces vectoriels. (exo 1, série 3)

Déf 4.19 Soit V un EV. Une partie $W \subseteq V$ est

un sous-espace vectoriel (SEV) si

(SEV.1) $0_V \in W$ (SEV.2') $v + \lambda w \in W, \forall v, w \in W, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$$

Exemple 4.1 $\mathbb{P} \subseteq \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction} \}$ est un SEV de $\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction} \}$.

Exemple 4.22 $\mathbb{P}_n$ est un SEV de $\mathbb{P}$.

Exercice Si $W \subseteq V$ est SEV d'un EV alors W avec la somme et le produit des scalaires de V restreints à des éléments de W est un EV (exercice 2, série 3)

Déf 4.14 Soit V un EV et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$. Alors une combinaison linéaire

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \in V \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$$

La famille $\mathcal{F}$ est liée s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul tel que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = \mathbf{0}_V.$$

La famille $\mathcal{F}$ est libre si elle n'est pas liée.

Exemple 4.16 $\{1, t, t^2, \dots, t^p\} \subseteq \mathbb{P}$ est-elle libre ou liée?

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_p t^p = \mathbf{0} = 0 + 0t + 0t^2 + \dots + 0t^p \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \dots \\ \lambda_p = 0 \end{matrix} \quad \boxed{\text{Faît}}$$

Def 4.25 Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$, où V est EV. Alors

$$\text{Vect } \mathcal{F} = \text{Vect } \{v_1, \dots, v_p\} = \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \right\}$$

(partie engendrée par $\mathcal{F}$ ou sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.)

Propriété fondamentale (lemme 4) $\text{Vect } \mathcal{F}$ est un SEV de V .

(Preuve) $\mathbf{0}_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}$.

(car $0 \cdot u = \mathbf{0}_V, \forall u \in V \leftarrow$ Exercice 3, série 3)

$$\begin{aligned} & \mu = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \text{ et } w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p \\ & \text{alors} \\ & \mu + \lambda w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(\text{E.V.5})}{=} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda(\mu_1 v_1) + \dots + \lambda(\mu_p v_p)$$

$$\stackrel{(\text{E.V.7})}{=} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + (\lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda \mu_p) v_p$$

$$\stackrel{(\text{E.V.1})}{=} \lambda_1 v_1 + (\lambda \mu_1) v_1 + \dots + \lambda_p v_p + (\lambda \mu_p) v_p = (*) \quad \square$$

$$\begin{aligned} (*) & (\lambda_1 + \lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda \mu_p) v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}. \\ & \uparrow (\text{E.V.6}) \end{aligned}$$

(26.09)

Dans cette séance $\rightarrow$ application linéaire + exemples

- $\rightarrow$ noyau et image d'une application linéaire
- $\rightarrow$ matrice canonique d'une application linéaire
- $\rightarrow$ opérations sur les matrices (produit, transposée, ...)

Pas les sections 4.5, 4.7, 4.8, ni Lemme 6 ni Thm 4.46 $\rightarrow$ pour plus tard!

§ 4.6. Applications linéaires

Déf. 4.39 Soit $f: V \rightarrow V'$ une application entre deux EV V et V' . On dit que f est linéaire si $f(v + \lambda w) = f(v) + \lambda f(w)$, $\forall v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Rk. H1 C'est la même que la déf 3.13 pour $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dans ce cas, on a aussi $f(0_V) = 0_{V'}$.

Exemple 4.43* Soit $V = \mathbb{P}$ et $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $f(p) = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p(1) \end{pmatrix}$ pour $p \in \mathbb{P}$. Alors f est linéaire:

$$f(p + \lambda q) = \begin{pmatrix} \int_0^1 (p + \lambda q)(t) dt \\ (p + \lambda q)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 (p(t) + \lambda q(t)) dt \\ p(1) + \lambda q(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p(1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \int_0^1 q(t) dt \\ q(1) \end{pmatrix} = f(p) + \lambda f(q) \quad \checkmark$$

Def 4.44 Pour $T: V \rightarrow V'$ application linéaire, on définit le noyau de T :

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_{V'}\} = \underbrace{T^{-1}(\{0\})}_{\text{image réciproque / inverse / préimage de } \{0\} \text{ par } T.}$$

Lemme fondamental (lemme 7) Si $T: V \rightarrow V'$ est une application linéaire, alors

$$T \text{ injective} \iff \text{Ker}(T) = \{0_V\}$$

(Preuve) Exercice (voir les notes). $\square$

$$\bigcirc = \text{nul} \quad \emptyset = \text{ensemble vide}$$

Quelques propriétés en plus

(Lemme 8) Si $T: V \rightarrow V'$ une application linéaire, alors

- $\text{Ker}(T)$ est un SEU de V ;
- $\text{Im}(T)$ est un SEU de V' .

(Lemme 9) Si T est une application linéaire bijective, alors T^{-1} est une application linéaire.

(Preuve) [pour $\text{Ker}(T)$] Comme $T(0_V) = 0_{V'}$, alors $0_V \in \text{Ker}(T) \Rightarrow (\text{SEU.1}) \checkmark$
E.d. $v, w \in \text{Ker}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(v + \lambda w) \stackrel{T \text{ lin.}}{=} T(v) + \lambda T(w) \stackrel{v, w \in \text{Ker}(T)}{=} 0_{V'} + \lambda \cdot 0_{V'} = 0_{V'} + 0_{V'} = 0_{V'} \quad (\text{SEU.2}) \checkmark$

Rappel: $\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\} \subseteq V'$

Chapitre 5 $\leftarrow$ § 5.1 et § 5.5 pour l'instant

(ou matrice canonique de T)

Déf B Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On définit la matrice de T via

$$[T] = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}} \right\} \text{m lignes}, \text{ où } \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Thm. 5.1 Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors

$$(*) \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

↑ produit matrice-vecteur colonne

En plus, $[T]$ est la seule matrice qui satisfait (*): si A est de taille $m \times n$ et $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $[T] = A$. (unicité)

(Preuve de (*)) $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) \stackrel{\substack{\text{def } T \\ T \text{ lin}}}{=} x_1 T(\bar{e}_1) + \dots + x_n T(\bar{e}_n) \stackrel{\substack{\text{def } [T] \\ \text{§ 5.1}}}{=} \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \square$

(Unicité $\rightarrow$ exercice)

Chapitres 6 + 7 + §5.5

Opérations sur les matrices

Def C $M_{m \times n}(\mathbb{R}) := \{ A \text{ matrice de taille } m \times n \text{ à coefficients dans } \mathbb{R} \}$.

Pour $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,n} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \dots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & \dots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{pmatrix}}_{A+B \text{ (somme)}} \text{ et } \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \dots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}}_{\lambda \cdot A \text{ (produit par } \lambda)}$$

Def 6.2 $A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit le produit $A \cdot B$

par la matrice $C \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ donnée par

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} = A_{i,1} B_{1,j} + \dots + A_{i,m} B_{m,j}$$

pour $i \in [1, p]$ et $j \in [1, n]$.

Def. 5.21 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit la matrice transposée $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

par $(A^T)_{ji} = A_{ij}$ pour $i \in [1, m]$ et $j \in [1, n]$.

Exemple G.B*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 21 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 7 = 21$$

Exemple 5.22*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \square$$

Dans cette séance on va voir

- notion de matrice identité
- notion de matrice inversible
- déterminant d'une matrice 2×2

• lien entre produit et la composition de matrices d'applications lin.

• lien entre inverse d'une matrice et l'application réciproque.

[Déf 6.7] On dit que $A, B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ ($=: M_m(\mathbb{R}) \leftarrow$ espace de matrices carrées de taille m) commutent si $AB = BA$.

Exemple 6.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\neq$ $\nabla \nabla \nabla \nabla$ A, B ne commutent pas.

[Déf 6.8] La matrice identité de taille n est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ } n lignes n colonnes

[Obs] $\text{id}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow [\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$

application identité $\uparrow$
 $\mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}$

Def. 7.1 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B.A = A.B = I_n$. Alors B est unique (ex 8), on la note A^{-1} .

Quelques propriétés (Prop 5, p. 98 + Prop. 6, p. 102):

- (i) $A.(B.C) = (A.B).C$, $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n \times q}(\mathbb{R})$;
- (ii) $A.(B+C) = A.B + A.C$, $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$, $\forall B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
- (iii) $(B+C).A = B.A + C.A$, $\forall B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$;
- (iv) $(A.B)^T = B^T.A^T$...
- (v) $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^T = A$, ...
- (vi) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- (vii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- (viii) $I_m.A = A = A.I_n$, $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(Preuve de (vi)) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversibles $\Rightarrow AB$ inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

En effet

$$(B^{-1}A^{-1}).(AB) = \underbrace{B^{-1}.A^{-1}.A}_{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}} \quad \underbrace{I_n}} \cdot B = \underbrace{B^{-1}.I_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} \cdot B = \underbrace{B^{-1}.B}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} = I_n \quad \checkmark$$

et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \cdot \underbrace{B.B^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}} \quad \underbrace{I_n}} \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot \underbrace{A^{-1}.A}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} = \underbrace{A.A^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} = I_n \quad \checkmark \quad \square$$

Lien entre composition d'applications linéaires et produit de matrices (p. 95-96)

Soient $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux app. lin. On peut définir

$$[T] = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \text{ et } [S] = \underbrace{\begin{bmatrix} S(\bar{e}_1) & \dots & S(\bar{e}_m) \end{bmatrix}}_{m \text{ colonnes}} \left. \begin{array}{l} \text{mlignes} \\ \text{plignes} \end{array} \right\}$$

FAIT FONDAMENTAL Alors $S \circ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire et

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T] \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$$

(produit matriciel)

(Preuve) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Thm S.1}} (S \circ T) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \left(T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{Thm S.1}} [S] \cdot T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [S] \cdot [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \xRightarrow[\text{unicité du Thm S.1.}]{} [S \circ T] = [S] \cdot [T] \quad \square$

SLOGAN: Comp. d'app. linéaires = Produit de matrices canoniques associées

Conséquence Comme $[\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$, alors si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertible et lin, = bijective

on a $[T^{-1}] = \overbrace{[T]^{-1}}^{\text{application réciproque de } T}$ (et $[T]$ invertible)
matrice inverse

(Preuve) Comme $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, alors $[T \circ T^{-1}] = [T^{-1} \circ T] = [\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$
ce qui nous dit que $[T]$ est invertible

FAIT précédent $\xrightarrow{[T] \cdot [T^{-1}] = I_n} [T^{-1] \cdot [T] = I_n}$

$$\text{et } [T]^{-1} = [T^{-1}].$$

□

Pourquoi?

Soit un SEL
 $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$

$$(\bar{b} \in \mathbb{R}^m, A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

Si $n=m$ et A inversible : alors $A \bar{x} = \bar{b}$ est compatible déterminé et $\bar{x} = A^{-1} \bar{b}$ est solution.

$$(\text{car } A \cdot \bar{x} = \bar{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_n} \cdot \bar{x} = A^{-1} \bar{b} \Rightarrow \bar{x} = A^{-1} \bar{b})$$

Comment trouver A^{-1} pour A inversible?

§ 7.3. Inversion de matrices 2×2

Thm 7.6 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible ss, $ad - bc \neq 0$.
In plus, si $ad - bc \neq 0$,
déterminant de $A \rightarrow \det(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Exo 5, série 6)

(Preuve) $\Leftarrow$ On suppose que $ad - bc \neq 0$. Alors

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

= 0 = 0

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

=0 =0

Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible si } ad-bc \neq 0 \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$) Voir les notes. $\square$

Calcul du noyau d'une application linéaire

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ app. lin.

Noyau

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{x}) = 0 \right\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : [T] \cdot \bar{x} = 0 \right\}$$

Exemple (Exo 5
série 4)

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{pmatrix} \quad (T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3)$$

Alors

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Ker}(T) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(boulet)

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

FER de $[T]$

i.e. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$

ssi

$$\begin{pmatrix} -6x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

quelque soit $x_4 \in \mathbb{R}$

i.e.

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -6x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

Image

$$\text{Img}(T) = \text{Vect} \{ T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_n) \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$= \left\{ \underbrace{[T] \cdot \vec{x}}_{x_1 T(\vec{e}_1) + \dots + x_n T(\vec{e}_n)} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En conséquence, T est surjective ssi $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $[T] \cdot \vec{x} = \vec{b}$ est compatible $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Exemple (suite)

$$\left[[T] : \vec{b} \right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & b_1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & b_3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{OFL}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_3 \end{array} \right)$$

compatible $\forall \vec{b}$
 $\Rightarrow T$ surjective $\square$

Dans cette séance on va voir

- notion de matrice élémentaire
- lien entre matrices élémentaire et inversibles
- calcul des inverses $\leadsto$ exemples ?

- d'autres descriptions d'inversibilité.

§ 7.4. Inversion d'une matrice $n \times n$

Def. 7.9 Une matrice carrée est dite élémentaire si elle s'obtient de la matrice identité en effectuant précisément une OEL.

Exemple 7.10* (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est élémentaire : $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} A$

(ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élémentaire : $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow (-2) \cdot L_2} B$ & $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas élémentaire !!

(iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élémentaire, car $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3} C$

RK. FONDAMENTALE Soit $E \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice élémentaire. Alors :
 $A \xrightarrow{\circ} \underbrace{E \cdot A}_{\text{produit de matrices}}$ associe à une OEL $\circ$

(Preuve) ^{Pour:} $\odot = (L_i \leftarrow L_i + 2L_j)$ avec $j < i$. Alors la matrice élémentaire associée est

$$j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \odot \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j,1} & \dots & A_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,n} \\ A_{j,1} & \dots & A_{j,n} \\ A_{j+1,1} & \dots & A_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i-1,1} & \dots & A_{i-1,n} \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$



II

$$\cancel{0 \cdot A_{1,1} + 0 \cdot A_{2,1} + \dots + 0 \cdot A_{j-1,1} + 2 \cdot A_{j,1} + 0 \cdot A_{j+1,1} + \dots + 0 \cdot A_{i-1,1}}$$

$$+ 1 \cdot A_{i,1} + 0 \cdot A_{i+1,1} + \dots + 0 \cdot A_{n,1} = 2A_{j,1} + A_{i,1}$$

et de même pour les autres coefficients de l'i-ème ligne de A' . $\square$

Corollaire (Lemme 12) Toute matrice élémentaire est inversible.

(Preuve) Si O est $O \in GL_n(\mathbb{R})$ et O^{-1} est l' $O \in GL_n(\mathbb{R})$ inverse, alors

$$\underbrace{F(O^{-1}) \cdot F(O)}_{\substack{\text{matrice élémentaire} \\ \text{associée à } O}} \cdot I_n = \underbrace{F(O^{-1}) \cdot F(O)}_{\substack{\text{matrice obtenue} \\ \text{en appliquant } O^{-1} \text{ à } F(O)}} = I_n$$

$$F(O) \cdot F(O^{-1}) \cdot I_n = F(O) \cdot F(O^{-1}) = \underbrace{\text{matrice obtenue}}_{\text{en appliquant } O^{-1} \text{ à } F(O)} = I_n$$

$$\Rightarrow \boxed{F(O)^{-1} = F(O^{-1})}$$

□

Thm. 7.12 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible ssi il existe des matrices élémentaires

$F^{(1)}, \dots, F^{(p)} \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\boxed{I_n = F^{(p)} \dots F^{(1)} \cdot A} \equiv \boxed{\text{la FER de } A \text{ est } I_n!}$$

(Preuve) $\Leftarrow$ Comme $F^{(1)}, \dots, F^{(p)}$ sont inversibles, alors :

$$(F^{(1)})^{-1} \dots (F^{(p)})^{-1} I_n = (F^{(1)})^{-1} \dots \underbrace{(F^{(p)})^{-1} F^{(p)}}_{I_n} \dots F^{(1)} \cdot A$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(F^{(1)})^{-1} \dots (F^{(p)})^{-1}}_{\substack{\text{produit de matrices} \\ \text{inversibles}}} I_n \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

(et même $A^{-1} = \underline{F^{(p)} \dots F^{(1)}}$).

$\Rightarrow$) Lire les notes □

Calcul de A^{-1}

En deux mots (pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible):

n lignes $\{ [A : I_n] \xrightarrow{\text{FER}} [I_n : A^{-1}] \}$
 2 n colonnes

Exemple 7.14 On va montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ est inversible et on va calculer A^{-1} .

$$[A : I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array} \right) \leftarrow A^{-1}?$$

(Preuve de la méthode) Comme A est inversible, alors $I_n = F^{(p)} \dots F^{(1)} A$ (avec $F^{(1)}, \dots, F^{(p)}$ des matrices élémentaires)

alors $\underbrace{F^{(p)} \dots F^{(1)}}_{A^{-1}} \cdot [A : I_n] \xrightarrow[\substack{\text{OEL} \\ \text{associées} \\ \text{à } F^{(1)}, \dots, F^{(p)}}]{\substack{\text{OEL} \\ \text{associées} \\ \text{à } F^{(1)}, \dots, F^{(p)}}} \left[\underbrace{F^{(p)} \dots F^{(1)} A}_{I_n} : \underbrace{F^{(p)} \dots F^{(1)} I_n}_{A^{-1}} \right] = [I_n : A^{-1}]$ $\square$

Thm 7.15* (sans items (h), (i)) Par $A \in M_n(\mathbb{R})$, les cond. suivantes sont équivalentes

- (a) A est inversible;
- (b) A est un produit (fini) de matrices élémentaires;
- (c) la FER de A est I_n ;
- (d) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, le SEL $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ est compatible déterminé;
- (e) le SEL $A \cdot \vec{x} = 0$ n'a pas de solution non triviale;
- (f) les colonnes de A forment un ensemble libre;
- (g) les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.

(Preuve) Voir les notes. $\square$

↓ Dans cette séance on va voir:

- (i) Une simplification dans la définition d'inversibilité;
- (ii) un rappel de la définition de déterminant 2×2 ;
- (iii) la définition générale du déterminant $n \times n \rightarrow$ calcul récursif ?
- (iv) quelques propriétés du déterminant (transposition, OEL, ...)

(08.10.2024)

Corollaire du Thm 7.15* (Proposition 7) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

A inversible $\iff \exists B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B.A = I_n$

$\iff \exists C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A.C = I_n$

(Preuve) $\Leftarrow$ de la 1ère ligne On suppose qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B.A = I_n$.

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $A.\bar{x} = 0$. On veut montrer que $\bar{x} = 0$. Pour le faire, on considère

$$\bar{x} = I_n.\bar{x} = \underbrace{B.A}_{=I_n}.\bar{x} = B.0 = 0 \implies A \text{ inversible}$$

item (c) $\iff$ item (a)
du Thm 7.15*

□

(pour le reste de la preuve, voir les notes)

Chapitre 9 Déterminants

le Chap. 8 sera vu plus tard

§ 9.1. Rappel du déterminant 2×2

On rappelle que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \stackrel{\substack{\text{on} \\ \text{écrit} \\ \text{aussi}}}{=} \det \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right)$$

Propriétés (Proposition 8)

$$(ML) \quad \det(\bar{a} + \lambda \bar{a}', \bar{b}) = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}', \bar{b}) \quad \& \quad \det(\bar{a}, \bar{b} + \lambda \bar{b}') = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}, \bar{b}')$$

$\uparrow$ multilinéarité

$$(ALT) \det(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \quad \leftarrow \text{alternance}$$

$$(NoR) \det(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1 \text{ où } \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

pour tous $\bar{a}, \bar{a}', \bar{b}, \bar{b}' \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(Preuve) (ALT) \det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2}(MUL) \det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} a_1 + \lambda a'_1 \\ a_2 + \lambda a'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = (a_1 + \lambda a'_1) b_2 - (a_2 + \lambda a'_2) b_1$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \lambda (a'_1 b_2 - a'_2 b_1) = \det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) + \lambda \det \left(\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \quad \square$$

§ 9.2. Définition générale de déterminant

Déf. 9.2 Une application $\varphi: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ^{n facteurs} $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \mapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ avec $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^n$ est dite

(MUL) multilinéaire si pour tout $i \in [1, n]$ et tous vecteurs $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^n$ fixes, l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{a}_i \mapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n)$ est linéaire

(ALT) alternée si $\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$ dès que deux vecteurs $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$ coïncident pour $i \neq j$.

(NoR) normalisée si $\varphi(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = 1$ où $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Exercice (Ex. 9.3) φ satisfait (MUL) + (ALT) $\Rightarrow \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = - \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$ ^{transposition de $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$} $\square$

(antisymétrie de φ)

Déf 9.4 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $i \in [1, m]$, $j \in [1, n]$, on définit la sous-matrice principale $A[i|j] \in M_{(m-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$ comme la matrice obtenue de A en éliminant la i -ème ligne et la j -ème colonne.

Exemple 9.5* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A[2|3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Thm 9.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}$, il existe une unique application multilinéaire et alternée $\underline{\Phi}_{n,c} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ facteurs}} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\underline{\Phi}_{n,c}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = c$.

$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \mapsto \underline{\Phi}_{n,c}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$

Pour $c=1$, on écrit "det" au lieu de $\underline{\Phi}_{n,1}$.

Pour $n=2$, $\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

En plus, si $n > 2$, $\underline{\Phi}_{n,1}$ peut être calculée à partir de $\underline{\Phi}_{n-1,1}$ par

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A[i|k])$$

• développement selon l' i -ème ligne :

• développement selon la j -ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{l=1}^n (-1)^{j+l} a_{lj} \det(A[l|j])$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(Preuve) O mise $\square$

Exemple 9.7

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

A

déu. selon
l'èreligne

$$= +1 \cdot \det(A[1|1]) - 2 \cdot \det(A[1|2]) + (-3) \cdot \det(A[1|3])$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 78 - 3 \cdot 67 = -360$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

□

§ 9.3. Propriétés

Déf 9.8. Si $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \in M_n(\mathbb{R})$, on écrit $\det(A)$ ou $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$.

Lemme 13 $\det(A^T) = \det(A)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$

Déf. 9.12 On dit qu'une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$. Elle est diagonale si $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$.

Lemme 14 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, alors

$$\det(A) = a_{1,1} \cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

(Preuve des lemmes dans les notes)

Proposition 9

(OEC.I) $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = - \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$

transposition de $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$

(OEC.II) $\det(\bar{a}_1, \dots, \lambda \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n) = \lambda \cdot \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

(OEC.III) $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$ par $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$

} par (MUL) + (ALT)!

} par (MUL)! + (ALT)

(preuve = exercice) i -ème colonne (et $\bar{a}_j$ est la j -ème colonne de)

(Preuve de (OEC.III)) Pour $i \leq j$:

$$\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) + \lambda \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) \quad \checkmark \quad \square$$

i -ème colonne

(MUL)

= 0 d'après (ALT)

Dans cette séance on va voir

(Avec Prop. 9)

(10.10.24)

- (i) plusieurs exemples de calcul du déterminant;
- (iii) lien entre inversibilité et déterminant;

(ii) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$;

~~(iv) formule de Cramer~~

Exemple 9.11* On veut calculer $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & -8 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 0$ par (ALT)?

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (\text{OEC.I})$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (\text{OEC.II})$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ -18 & 4 & -7 & 3 \\ 11 & -2 & 2 & 5 \\ 10 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (\text{OEC.III})$$

$\underbrace{\quad}_{C_1} \quad \underbrace{\quad}_{C_3} \rightsquigarrow \underbrace{\quad}_{C_1 \leftarrow C_1 + 3C_3}$

on a les
mêmes
résultats

pour des
OEL?

(car $\det(A) = \det(A^T)$)

Exemple 9.16 On va calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Méthode 1 On calcule une FE de A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A = A^{(0)}} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}]{(\text{OEL.III})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}}_{A^{(1)}} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}}_{A^{(2)}} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}}_{A^{(3)}} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}]{(\text{OEL.II})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix}}_{A^{(4)}} \xrightarrow{(\text{OEL.I})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix}}_{A^{(5)}}$$

$\det(A^{(0)}) = \det(A^{(1)}) = -\det(A^{(2)}) = -2 \cdot \det(A^{(3)}) = -2 \cdot \det(A^{(4)}) = (-2) \cdot (-12) \cdot \det(A^{(5)})$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{12} \cdot L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A^{(5)}} \quad \quad \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A^{(6)}}$

$$= (-2) \cdot (-12) \cdot \det(A^{(6)})$$

$\uparrow$
 $(OEL.III)$

$$= 3$$

$$\Delta \text{ sup!} \Rightarrow \det(A^{(6)}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

Alors

$$\det(A) = (-2) \cdot (-12) \cdot 3 = 72$$

Méthode 2 Mélanger Méthode 1 et développement selon lignes/colonnes

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dév. selon 2ème ligne}} (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 = (-3) \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} = -6 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dév. selon 1ère ligne}} (-6) \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-6) \cdot (-3) \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 18 \cdot 4 = 72 \quad \checkmark$$

$\underbrace{6 \cdot 2 - 8 \cdot 1}_{=4}$

§ 9.4. L'identité $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Thm. 9.18 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(Preuve) Voir les notes $\square$

Thm. 9.19 Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, A est inversiblessi $\det(A) \neq 0$.

(Preuve) Si A est inversible, alors il existe $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $A^{-1} \cdot A = I_n$. Alors

$$1 = \det(I_n) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) \Rightarrow \det(A) \neq 0 \text{ et même } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

On va montrer maintenant que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible. Pour cela, on montre la contraposée.

Comme A n'est pas inversible, sa F.E.R. possède une ligne nulle. En plus, on sait qu'il existe $\underline{F}^{(1)}, \dots, \underline{F}^{(p)}$ matrices élémentaires t.q. $A = \underline{F}^{(p)} \dots \underline{F}^{(1)} \cdot A'$. $\Rightarrow \det(A) = \det(\underline{F}^{(p)}) \dots \det(\underline{F}^{(1)}) \cdot \det(A')$

Comme A' est Δ -sup et possède une ligne nulle, un coefficient de la diagonale de A' est 0, ce qui dit que $\det(A') = 0$. Ça implique que $\det(A) = 0$, car $\det(A) = \det(E^{(n)}) \dots \det(E^{(1)}) \cdot \underbrace{\det(A')}_{=0}$. $\square$

Quelques applications

$$\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det(A), \quad \forall P \in M_n(\mathbb{R}) \text{ inversible, } \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

(on dit que B et A sont semblables s'il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = PAP^{-1}$)

(Prove) $\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) \stackrel{\text{Thm 9.18}}{=} \det(P) \cdot \det(A) \cdot \underbrace{\det(P^{-1})}_{=\det(P)^{-1} \text{ (Thm 9.19)}} = \det(A)$

On va voir dans cette séance:

- (i) l'interprétation géométrique du déterminant
- (ii) la notion de base $\rightsquigarrow$ coordonnées } F.V

(15.10.2024)

§ 9.6. Déterminant et aire/volume

Thm 9.31 Pour $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$, alors

Aire du parallélogramme
défini par $\bar{v}$ et $\bar{w}$

$$= |\det(\bar{v}, \bar{w})| = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$$

preuve
dans
Exo
de
série 6

Thm 9.32 Pour $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{array}{l} \text{Volume du parallélépipède} \\ \text{défini par } \bar{u}, \bar{v} \text{ et } \bar{w} \end{array} = |\det(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|$$

(Preuve) Omise $\square$

Suite du Chapitre 4

§ 4.5. Bases

Def. 4.28 Soit V un $\mathbb{F}V$. Une partie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ est dite base de V si elle est libre et engendre V . (ordonné)

Proposition (p. 56) Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base de V . Alors, pour tout $v \in V$ il existe des uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.

(Preuve) Dans les notes.

Exemple 4.32 $\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est base de $\mathbb{R}^n$.
base canonique $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_n$

Exemple 4.33 $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

On veut montrer que $\mathcal{B}$ est libre et engendre V :

$\mathcal{B}$ libre $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} 2\alpha_1 - 7\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\leadsto$ SEL homogène associé à $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$: $\mathcal{B}$ libre $\Leftrightarrow (*)$ admet seulement la sol. triviale

$\leadsto$ on calcule la FJR : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}$ libre
de $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ engendre } V} \equiv \forall \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \text{le SFL } \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ est compatible } \forall \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$$\equiv \text{la FER admet un pivot par ligne. } \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Exemple 4.34 $V = \mathbb{P}_n$ et $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$. (exercice)

Thm. 4.46 Soit $T: V \rightarrow W$ une app. lin et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$.

(i) T inj. + $\mathcal{B}$ libre $\Rightarrow T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_p)\} \subseteq W$ libre

(ii) T surj. + $\mathcal{B}$ engendre $V \Rightarrow T(\mathcal{B})$ engendre W

En conséquence, si T bij. + $\mathcal{B}$ base de $V \Rightarrow T(\mathcal{B})$ base de W .

Réciproquement, si $T(\mathcal{B})$ est base de W
 $\mathcal{B}$ est base de $V \Rightarrow T$ bijective.

exercice
essayer
de le
prouver

(Preuve) Dans les notes.

Déf. 4.29 Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de V . On sait que, pour tout $v \in V$ il existe uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.

Le vecteur de coordonnées de v relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

α_i est la i -ème coordonnée / composante de v relative à $\mathcal{B}$.

Exemple 4.33 (suite) Soit $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. C'est quoi $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$?

(où $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$) On veut calculer

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 3 + 7 \cdot (-4)}{13} \\ \frac{-3 - 2 \cdot 4}{13} \end{pmatrix}$$

① Calculer la F.R. de $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{2} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 3 + 7 \cdot (-4)}{13} \\ \frac{-3 - 11}{13} \end{pmatrix}$$

Exemple 4.32 (suite)

Pour $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \underline{v} \quad \nabla \quad 0$$

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{b} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dans cette séance on va voir:

(i) la notion de dimension

(ii) lien entre familles libres/génératrices et bases $\longrightarrow$ extraction et complétion

(iii) construction d'applications linéaires

(iv) la matrice d'une application linéaire (cas général)

(17.10.2024)

§ 4.7. Dimension

Lemme 10

Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de V et $\mathcal{F} \subseteq V$ une famille d'au moins $p+1$ éléments. Alors $\mathcal{F}$ est liée.

(Preuve) Soit $T_B: V \rightarrow \mathbb{R}^p$. Il s'agit d'une application linéaire qui satisfait que
 $v \mapsto [v]_B$
 $T_B(B) = \{T_B(v_1), \dots, T_B(v_p)\} = B_{\text{can}} \leftarrow \text{de } \mathbb{R}^p$
 $\uparrow$ base! $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\uparrow$ base!
 D'après le Thm. 4.46, T_B est bijective!

On a vu dans le Thm 3.9 qu'une famille d'au moins $p+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}^p$ est liée $\Rightarrow T_B(\mathcal{F})$ est liée $\Rightarrow T_B^{-1}(T_B(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ est liée $\square$
 d'après le Thm. 4.46

Conséquence fondamentale (Corollaire 2): Si $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ et $B' = \{v'_1, \dots, v'_q\}$ sont deux bases de V , alors $p = q$.

Déf. 4.47 Si un espace vectoriel V admet une base $B = \{v_1, \dots, v_p\}$, on dit que la dimension de V est p . (on écrit $\dim V = p$).

Exemple 4.32 (suite)

$\dim \mathbb{R}^n = n \leftarrow$ car $B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 a n éléments.

Exemple 4.34 (suite) $\dim \mathbb{P}_n = n+1 \leftarrow$ car $\mathcal{B}_{\mathbb{P}_n} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est base de $\mathbb{P}_n$.

Exercice $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) \stackrel{?}{=} m \cdot n \leftarrow$ F.V. ? $\begin{matrix} m=3 \\ n=2 \end{matrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Exemple ($\sim$ Exos 7, 9 série 7)

Méthode générale pour bases de $\rightarrow \text{Ker}(A)$ et $\text{Img}(A)$

Soit $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'app. lin associée à $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On veut : $\text{Ker}(T_A)$ et $\text{Img}(T_A)$
bases de : $\text{Ker}(A)$ $\text{Img}(A)$

$\text{Ker}(T_A)$: On calcule la FER de A $\downarrow$ x_3 est libre ∇

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A' \text{ FER de } A} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 5/4 x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$

base de $\text{Ker}(A)$ ∇

$$\Rightarrow \text{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 5x_3/4 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \text{Ker}(A).$$

Img(A) | ① $T: V \rightarrow W$, $\mathcal{B}_V \subseteq V$ base de $V \Rightarrow T(\mathcal{B}_V)$ famille génératrice de W

② $\exists \mathcal{B}_W$ base de $\text{Img}(A)$ telle que $\mathcal{B}_W \subseteq T(\mathcal{B}_V)$

① On prend $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ ($V = \mathbb{R}^3$ et $W = \mathbb{R}^2$) $\Rightarrow T_A(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
($T = TA$)

② Règle: On choisit $\mathcal{B}' \subseteq T_A(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})$ formé des colonnes dont la F.E.R. contient un pivot.

Alors $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\text{Img}(A)$.

Trois résultats fondamentaux

① Extraction (Lemme 5, p. 60) Si $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ famille génératrice de V

et $v_j \in \text{Vect} \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_r\}$, alors $\mathcal{F} \setminus \{v_j\} = \{v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_r\}$ est famille génératrice de V .
 $= \text{Vect} \{v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_r\}$ (notation)

↓
Conséquences: • Si $\mathcal{F}$ est fam. génératrice de $V \Rightarrow \exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ base de V .
 • Si $\mathcal{F}$ est fam. génératrice à $\dim V$ éléments, alors elle est une base de V .

② **Complétion** (Thm. 4.53) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ famille libre de V et $\dim V = n$.

Alors $p \leq n$ et il existe $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tels que $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base de V .

Conséquence: Une famille libre de V à $\dim V$ éléments est une base de V .

③ **Résultat fondamental sur les applications linéaires** Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ base de V ←
 $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\} \subseteq W$ famille de W ← deux EV

Alors, il existe une unique application linéaire $T: V \rightarrow W$ telle que $T(v_i) = w_i$;
 $\forall i \in [1, p]$. En plus, T bijective ssi $\mathcal{C}$ est une base (d'après le Thm. 9.46).

Exercice Soient $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\bar{w} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ -e \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $T(\bar{v}) = \bar{w}$.

Exemple 4.36 Soit

$$V = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(méthode d'extraction:
SEV de $\mathbb{R}^n$)

On veut une base de V . $\rightarrow$ Règle: Calculer la FER de $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et choisir les éléments de $\mathbb{F}$ qui correspondent aux colonnes de la FER avec des pivots.

Dans ce cas

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

FER $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } V$$

1^{er} vecteur
de $\mathbb{F}$

2^{ème} vecteur
de $\mathbb{F}$

! **[RK]** Pas de "méthode" de complétion d'une fam. libre $\{v_1, \dots, v_p\}$.
Il faut: $v_{p+1} \notin \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$, $v_{p+2} \notin \text{Vect}\{v_1, \dots, v_{p+1}\}$, ...

§4.8. Matrice d'une application linéaire

Soient

- V, W deux EV
- $T: V \rightarrow W$ app. lin

- $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de V

- $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W

Déf. 4.55 La matrice de T relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (ou la représentation matricielle de T relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$) est

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(v_m)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

[Rk. J] $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = [T] \quad \square$

Propriété fondamentale

$$\underbrace{[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}}_{\in M_{n \times m}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{[T(v)]_{\mathcal{B}'}}_{\in \mathbb{R}^n}, \quad \forall v \in V.$$

Exemple*
4.56

(~ Ex. 6 de la série 9)

$$T: \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_2$$

$$p \longmapsto p'$$

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$$\mathcal{B}' = \{1, 1-t, (1-t)^2\}$$

On veut $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}'} & [T(t)]_{\mathcal{B}'} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}'} & [T(t^3)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$

$$[T(t^2)]_{\mathcal{B}'} = [2.t]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2t &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1-t) + \gamma (1-t)^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \cdot 1 \\ &\quad + (-\beta - 2\gamma)t \\ &\quad + \gamma t^2 \end{aligned}$$

S.E.L.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = 0, \beta = -2, \alpha = 2}$$

$$\Rightarrow [2.t]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette séance on va voir

29.10

- (i) exemple sur la matrice d'une application linéaire
- (ii) le thm. du rang $\leftarrow$ le rang d'une app. lin / matrice
- (iii) la notion d'espace colonne / ligne
- (iv) ~~la notion de matrice de passage~~ $\leftarrow$ la prochaine fois!

Exemple 4.57

$$\bullet T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$$

dérivée
de p $\uparrow$

} Test linéaire (exo)

$$\bullet \mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$$

$$\bullet \mathcal{B}'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut calculer

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} := \begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} \end{bmatrix}$$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit maintenant

$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow$ Orthonormaliser $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = \begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}'} & [T(t)]_{\mathcal{B}'} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} ? \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \text{III} \quad \boxed{\text{SFL}}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$[T]_{B' \leftarrow B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

□

§ 4.9 + § 5.6 | Le théorème du rang

THM Soit $T: V \rightarrow V'$ une application linéaire entre deux EV de dim finie. Alors,

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \underbrace{\dim(\text{Img}(T))}_{\substack{\uparrow \\ \text{dét} \text{ rang de } T}} = \dim(V)$$

De façon équivalente, si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$,

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \underbrace{\dim(\text{Img}(A))}_{\substack{\uparrow \\ \text{dét} \text{ rang de } A}} = n$$

(Rappel) $\text{Img}(A) := \text{Img}(T_A)$

$\text{Ker}(A) := \text{Ker}(T_A)$

où $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v}$

Nouvelle déf Si $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ $\leadsto$ $\text{Col}(A) := \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$
 (colonnes de A)

pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{l}_1^T \\ \vdots \\ \bar{l}_m^T \end{pmatrix} \leadsto \text{Lgn}(A) := \text{Vect}\{\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

($\bar{l}_1^T, \dots, \bar{l}_m^T$ sont les lignes de A)

(e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $l_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $l_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$)

FAIT $\text{Col}(A) = \text{Img}(A)$

(Rappel) Pour trouver une base de $\text{Col}(A) = \text{Img}(A)$

① $A \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A}$ FER de A
 $(A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]) \quad (\tilde{A} = [\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n])$

② les numéros des colonnes de $\tilde{A}$ avec des pivots
 $\tilde{a}_{i_1}, \dots, \tilde{a}_{i_r}$

on les appelle "colonne-pivot" $\rightarrow \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ base de $\text{Img}(A)$

FAIT $\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(\tilde{A})$ si $\tilde{A}$ est FER de A .

Et les lignes non nulles de $\tilde{A}$ forment une base de $\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(\tilde{A})$

THM. 5.81 Pour toute matrice A on a que
 $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

Exemple Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$$

On a vu que

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto [T]_{\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathbb{P}_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sous forme échelonnée
réduite

Alors $[T]_{\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathbb{P}_2}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est surj $\Rightarrow \underline{T \text{ surj}}!$

Le THM du rang dit $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 3$

Or $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ car T est surj $\Rightarrow \dim(\text{Im}(T)) = 2$

On conclut que $\dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1$.

$\Rightarrow T$ n'est pas injective

Si l'on trouve un polynôme $p \in \text{Ker}(T)$ non nul alors $\{p\}$ est base de $\text{Ker}(T)$.

$$p(0) = 0 \text{ et } p'(1) = 0$$

$$p(t) = at^2 + bt \rightsquigarrow p'(t) = (2at + b) \Big|_{t=1} = 2a + b$$

on veut $2a + b = 0$

e.g. $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$

$$p(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$$

$$\in \text{Ker}(T)$$

et $\left\{-\frac{1}{2}t^2 + t\right\}$ base de $\text{Ker}(T)$.

Autre façon de calculer $\text{Ker}(T)$

$$[T(p)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

Alors

$$p \in \text{Ker}(T) \iff [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \in \text{Ker}([T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}})$$

$$\bar{x} = [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{ x_3 \cdot (0 - 2t + 1.t^2) : x_3 \in \mathbb{R} \right\} \iff \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

31.10.2024

Dans cette série on va voir

- (i) la matrice de passage
 - (ii) propriétés des matrices des app. lin + mat. de passage
 - (iii) ~~la formule de changement de base~~ $\leftarrow$ la prochaine fois!
- + exemples

Chapitre 8 Matrice de passage (ou changement de base)

  f. (Thm. 8.2) | Soit V un E.V., $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de V
 $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\}$ base de V

Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ via

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := [\text{id}_V]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \stackrel{(\text{déf.})}{=} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [v_p]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$

Exemple 8.4

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{\text{bases de } \mathbb{R}^2}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2} \right\}$$

On veut $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}$
 plus facile! $P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{C}}$

$$P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\bar{w}_1]_{B_{can}} & [\bar{w}_2]_{B_{can}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n : [\bar{v}]_{B_{can}} = \bar{v}_c$

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow B_{can}} = \begin{bmatrix} [\bar{e}_1]_{\mathcal{B}} & [\bar{e}_2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{e}_1]_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{d.f.}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ t.q.}$$

$$\underbrace{\alpha_1}_{\bar{w}_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha_2}_{\bar{w}_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow (\text{Résolution})$$

En conséquence

$$[\bar{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

et pareil pour $[\bar{e}_2]_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{cases} 3\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 1/3 \\ \alpha_1 = 1/3 \end{cases}$$

Propriétés des matrices de passage

Même terminologie que dans la définition:
 (PROP) $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow B} [v]_B$
 (FOND)

et $P_{B \leftarrow \mathcal{B}}$ est l'unique matrice qui satisfait à sa.

$$\bullet P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \leftarrow B} = P_{\mathcal{D} \leftarrow B}, \forall \mathcal{D} \text{ base de } V$$

$$\bullet P_{\mathcal{B} \leftarrow B} \text{ est inversible et } P_{\mathcal{B} \leftarrow B}^{-1} = P_{B \leftarrow \mathcal{B}}$$

Exemple 8.4 (suite)

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$T: V \rightarrow V'$ app. lin. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de V , $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ bases de V'
 $\dim(V) = n$ $\dim(V') = m$

(Rappel)

PROP
FOND

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$$

Propriétés

① Soit $S: V' \rightarrow V''$, $\mathcal{B}''$ base de V'' . Alors

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}'} [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$$

② T bijective ssi $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est inversible

③ Dans ce cas

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$$

et $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est la
seule matrice qui
satisfait à ça

$$\textcircled{3} \quad v \in \text{Ker}(T) \iff [v]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$$

En conséquence: $T \text{ inj} \iff [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ inj}$

$$\textcircled{4} \quad v' \in \text{Img}(T) \iff [v']_{\mathcal{B}'} \in \text{Img}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$$

En conséquence

$$T \text{ surj} \iff [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ surj}$$

Exemple 4.57 (suite)

$$T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$$

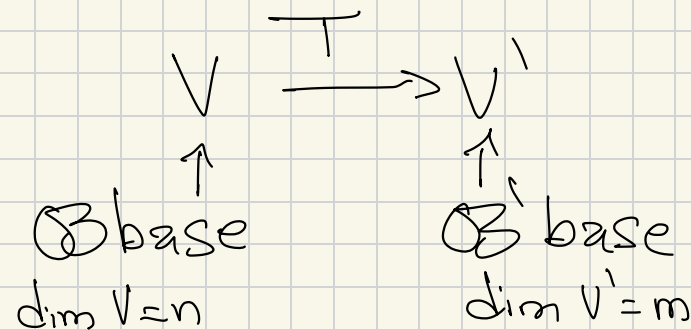
$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B}'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

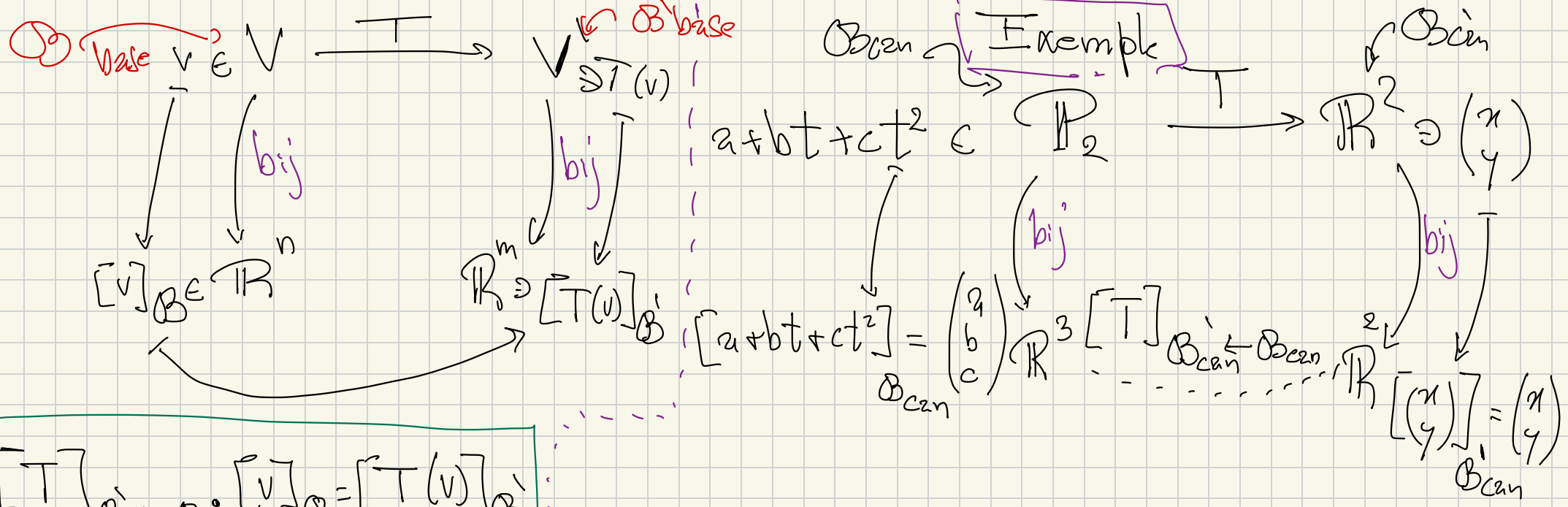
$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

← sous forme échelonnée réduite

D'après $\textcircled{4}$, $[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} \text{ surj} \implies \underline{T \text{ surjective}}$

Rappel sur $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$:





$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$$

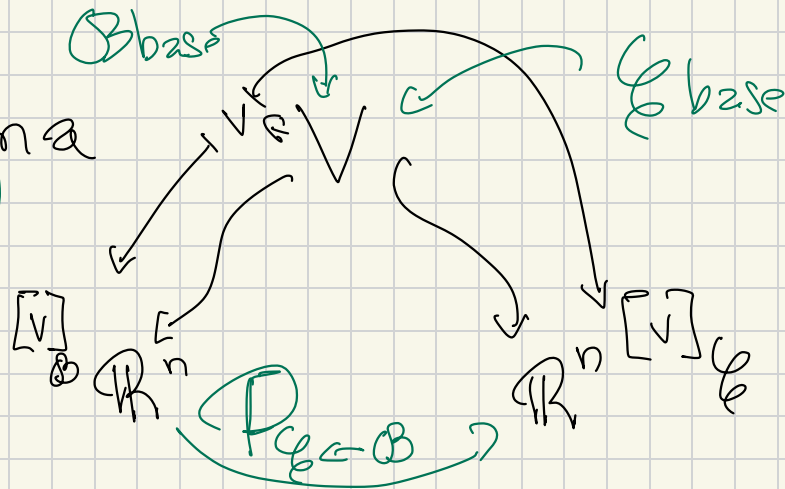
$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \in M(\mathbb{R})_{m \times n}$
 $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$
 $[T(v)]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^m$

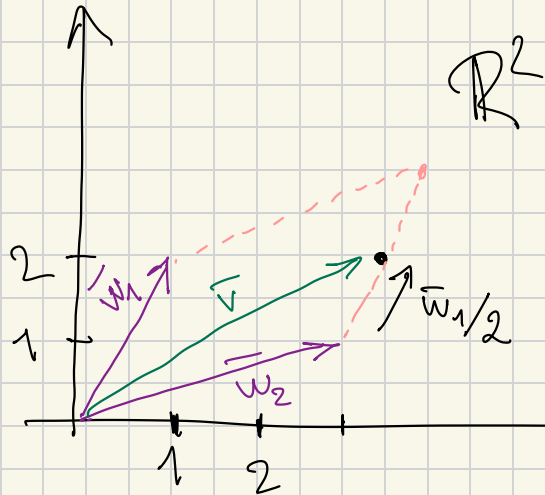
$$[T(a+bt+ct^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} \cdot [a+bt+ct^2]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

Pour matrices de passage on a

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$$

$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
 $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$
 $[v]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^n$





$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = \bar{w}_2 + \frac{1}{2} \cdot \bar{w}_1$$

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ base de $\mathbb{R}^2$

$$[\bar{v}]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$[\bar{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.57 (suite)

$$T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p = at + bt + ct^2 \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b+2c \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B'_{can} \leftarrow B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ker(T)?

①

On calcule $\text{Ker}([T]_{B'_{can} \leftarrow B_{can}}) = \text{Ker}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

x_3 libre! ∇

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

base
de $\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

② On traduit vecteurs de $\text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ dans des vecteurs de V :

pour chaque él. de base de $\text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}) \rightsquigarrow x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ él. de base de $\text{Ker}(T)$
 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 \cdot 1 + (-2) \cdot t + 1 \cdot t^2 = t^2 - 2t$$

i.e.
 $\{t^2 - 2t\}$ base de $\text{Ker}(T)$

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$$

Dans cette séance on va voir

OS.11

- (i) formule de changement de base
- (ii) exemples sur matrices de passage et matrices d'app. lin.
- (iii) la notion de valeur propre et vecteur propre

§8.3. Formule de changement de base

Set-up $T: V \rightarrow V'$ app. lin.
 $\begin{matrix} \nearrow & \nwarrow \\ B & B' \\ \text{deux bases} \end{matrix}$

Question: Comment calculer $[T]_{B' \leftarrow B}$
si on connaît $[T]_{B \leftarrow B}$??

Rép: Utiliser les matrices de passage!

Formule de changement

$$[T]_{B' \leftarrow B} = P_{B' \leftarrow B} [T]_{B \leftarrow B} P_{B \leftarrow B}$$

idée:

$$B' \leftarrow B = B' \leftarrow B \leftarrow B$$

(Preuve dans les notes)

Notation

$$S: V = V', \quad B = B' \quad \xrightarrow[\text{écrit plutôt}]{\text{on}} \quad [T]_{B' \leftarrow B}$$

Exemple 8.6*

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ abs}$$

$$B' = B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[T]_{B' \leftarrow B} = [T] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

bases canoniques

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

① $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{L}$ base canonique

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tripars?

calcul P
direct?

On veut

$$[T]_{\mathcal{L}' \leftarrow \mathcal{L}} = P_{\mathcal{L}' \leftarrow B'} [T]_{B' \leftarrow B} P_{B \leftarrow \mathcal{L}}$$

$$P_{B' \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{\text{rep.}}} P_{\mathcal{E}' \leftarrow B'} = P_{B' \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2d-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 13/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix} \square$

Exemple 8.5*

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ bases of } \mathbb{R}^3$$

Calculer (i) $[T] \stackrel{\text{def}}{=} [T]_{B_{can} \leftarrow B_{can}}$

(ii) $P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}}$ et $P_{\mathcal{E} \leftarrow B_{can}}$

(iii) $[T]_{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} [T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$

(i) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{E} \leftarrow B_{can}} = P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Alors

$$[T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow B_{can}} [T] P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dans cette séance on va voir
- (i) notion de valeur propre et de vecteur propre
 - (ii) notion d'espace propre
 - (iii) notion de polynôme caractéristique
- + exemples

07.11

(Rappel) Une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \longmapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$$

} c'est une application linéaire !

Informel: On veut trouver des "directions" pour lesquelles une app. lin $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se comporte comme une homothétie d'un certain rapport.

Déf. 10.2 Soit $T: V \rightarrow V$ une app. lin. / $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que

$\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T/A s'il existe $v \in V / \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que

$$T(v) = \lambda \cdot v \quad / \quad A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

↑ diff. de notes de Sachs

Informel:

vecteur propre = direction pour laquelle T/A se comporte comme une homothétie

valeur propre = rapport de ↑

vecteur propre avec valeur propre λ

⚠ • On peut avoir plusieurs vecteurs propres non colinéaires pour la même valeur propre.

• Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de valeur propre λ , alors $c \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est aussi vecteur propre de valeur propre λ si $c \neq 0$ réel.

Exemple 10.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

• $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A avec valeur propre $\lambda = -4$

Obs $\vec{v} \in \text{Ker}(A) \iff \vec{v}$ est vecteur propre de A avec valeur propre $\lambda = 0$

Exemple $T: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$

$$p(t) = a_0 t + \dots + a_n t^n \mapsto p'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1}$$

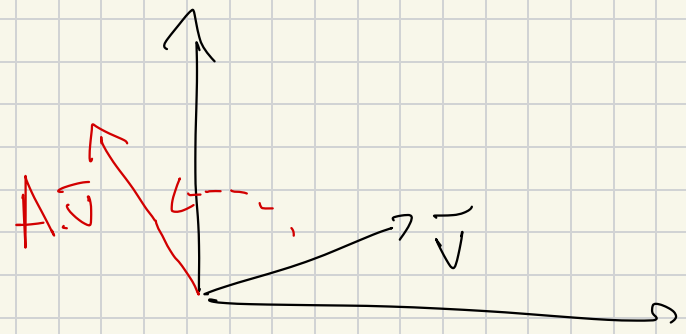
Alors T n'a pas de vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$;

i.e. $p' = T(p) = p$ n'a pas de solution non nulle !

Exemple $\text{Rot}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

de 90°

est une application linéaire



n'a pas de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^2$ ni de valeurs propres dans $\mathbb{R}$!!

De façon générale :

$$\text{Rot}_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Rot}_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Déf. 10.8 / Soit $T: V \rightarrow V$ app. lin / $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

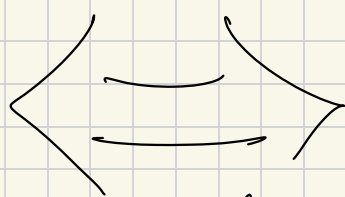
On définit l'espace propre associé à λ :

$$F_\lambda := \{v \in V : T(v) = \lambda \cdot v\} \subseteq V$$

$$F_\lambda := \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Pour $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$:

$\bar{v}$ est vecteur propre
avec valeur propre λ



$$\bar{v} \in F_\lambda \text{ et } \bar{v} \neq 0$$

(de même pour un esp. vect V)

• Comment calculer les valeurs/vecteurs propres d'une matrice?

Idee

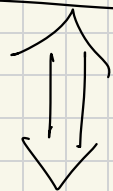
$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \iff A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \mathbf{0}$$

$$\iff \underbrace{A\bar{v} - \lambda \cdot I_n \bar{v}} = \mathbf{0}$$

$$\iff (A - \lambda \cdot I_n) \cdot \bar{v} = \mathbf{0}$$

$$\iff \bar{v} \in \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$$

Quand est-ce que $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\mathbf{0}\}$?



$A - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inj.



$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Conclusion
(Thm 10.14)

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ est valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Exemple 10.3 (suite) On veut calculer les valeurs propres de
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ on veut
racines de $\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$(2+4)(2-7) = \cancel{2-3}2 - 28 = (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

On a un polynôme de degré 2

(Général: $\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme de degré n en λ)

Déf. 10.16 $\det(A - \lambda I_n) =: P_A(\lambda)$ est le polynôme
caractéristique de A .

Dans l'exemple 10.3, on a donc deux valeurs propres: -4 et 7.
Pour calculer les vecteurs propres associés on calcule plutôt

les espaces propres:

$$\underline{F}_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n) \quad (\text{Lemme 15})$$

Pour l'exemple 10.9:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{-4} &= \text{Ker}(A + 4 \cdot I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \stackrel{\text{FER de } A+4I_2}{=} \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 6/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + \frac{6}{5}x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -6/5 \cdot x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -6/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\underline{F}_7 = \text{Ker}(A - 7 \cdot I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \stackrel{\text{FER de } A-7I_2}{=} \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Abrs Pour calculer valeurs/vecteurs propres :

① Calculer les racines de $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I_n)$ $\leftarrow$ valeurs propres

② Pour chaque valeur propre λ on calcule (une base de)

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n).$$

formée de vecteurs propres

Exemple 10.3 (suite)

Soit

$$T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

$$\left(\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors

$$[T_A]_{B_{can}} (= [T_A]_{B_{can} \leftarrow B_{can}}) = [T_A] = A$$

$$[T_A]_B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \left[[T_A \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}]_B \quad [T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_B \right]$$

valeurs propres
respectives

$$= \left[\begin{bmatrix} -4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}_B \right]$$

La formule de changement de base dit

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$[T_A] = P_{B \leftarrow B_{can}} [T_A]_B P_{B \leftarrow B_{can}}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/11 & -1/11 \\ 5/11 & 6/11 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}}_P \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/11 & -1/11 \\ 5/11 & 6/11 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

A

On veut

$$A^{10} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette séance on va voir

(i) exemples / exercices

(ii) notions de multiplicité algébrique et géométrique $\leftarrow$ et un lien entre les deux

12.11

Exercice / Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On veut calculer
les valeurs et
vecteurs propres

① Pour les valeurs propres = racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3)$

② Pour chaque valeur propre λ on calcule $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_3)$

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{dev}}{=} (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2-\lambda & -5 \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \left((-2-\lambda)(5-\lambda) + 10 \right) + 2 \cdot (4(5-\lambda) - 8) + (-20 + 4(2+\lambda))$$

$$= (4-\lambda) (\lambda^2 - 3\lambda) + 2(-4\lambda + 12) + (4\lambda - 12)$$

$$\textcircled{1} = (4-\lambda) \lambda (\lambda-3) - (4\lambda - 12)$$

$$= (4-\lambda) \cdot \lambda (\lambda-3) - 4(\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3) [(4-\lambda)\lambda - 4] = (\lambda-3) (-\lambda^2 + 4\lambda - 4)$$

$$= -(\lambda-3) (\lambda-2)^2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} = \dots &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda - (4\lambda - 12) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

Critère de Gauss Les racines de $\mathbb{Q}$ d'un polynôme $(\pm 1)\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ (et $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$), si y en a, sont entiers et diviseurs de a_0 .

↳ Dans ce cas: il faut essayer avec $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Imaginons que l'on essaie ici avec $\lambda = 2$ et c'est une racine

$$\Rightarrow \text{On divise } P_A(\lambda) \text{ par } \lambda - 2: \quad P_A(\lambda) = (\lambda - 2) \cdot (-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$$

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 3) \cdot (\lambda - 2)^2 \quad \Leftarrow$$

il faut les racines de ce polynôme

Déf. 10.24 Si λ_0 est une valeur propre de A , la multiplicité algébrique de λ_0 est le plus grand entier positif m tel que $(\lambda - \lambda_0)^m$ divise $P_A(\lambda)$. $\rightarrow$ Notation: $\text{mult}_A(\lambda_0)$

Alors $\boxed{\text{mult}_2(2) = 2 \text{ et } \text{mult}_2(3) = 1}$ dans cet exemple.

② Calcul des espaces propres $\underline{F}_2 := \text{Ker}(A - 2I_3)$ $\leftarrow$

$\boxed{\lambda = 2} \rightarrow F_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$ $\leftarrow$ Calculer une base

Dans ce cas

$$F_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\begin{matrix} \text{FER} \\ \text{variable} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3$$

$$\mathbb{F}_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(même type de calcul)

Def. 10.28 Pour λ valeur propre, $\dim(\mathbb{F}_\lambda) =: \text{mult}_g(\lambda)$
est la multiplicité géométrique de λ .

THM 10.30 $\text{mult}_g(\lambda) \leq \text{mult}_a(\lambda)$ pour toute valeur propre
 λ d'une matrice carrée A .

Dans notre exemple
 $P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$
 $\text{mult}_a(2) = 2 \geq \text{mult}_g(2) = 1$
 $\text{mult}_a(3) = 1 \geq \text{mult}_g(3) = 1$
 On veut des cas où $\text{mult}_g(\lambda) = \text{mult}_a(\lambda)$

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:
 Dans ce cas on peut faire la réunion des bases de chaque
 E_λ , $\forall \lambda$ valeur propre $\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^n$ (formée de vecteurs
 propres de A)

Exercice/Exemple

(exemple 10.20)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

← calculer
 valeurs et vecteurs
 propres

① $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)$

② $E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dans cette séance on va voir
un exemple en biologie des matrices d'applications linéaires
et des valeurs/vecteurs propres.

14.11

On va étudier un modèle de "population" simplifié

But: étudier l'évolution d'une population d'organismes du même type
dans le temps,

Hypothèses

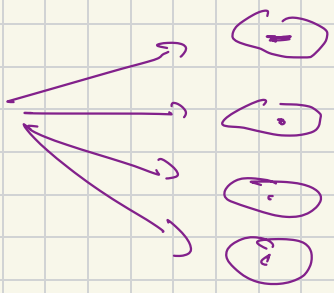
(1) chaque organisme a une durée de vie maximale de $N=3$ jours
↳ on va noter l'âge d'un organisme avec $1 \leq i \leq 3 = N$

(2) Si un organisme
a l'âge i

→ la probabilité de survie
encore un jour est → $p_{i+1 \leftarrow i} \in [0,1]$

→ la quantité d'organismes progéniteurs
(nés au premier jour) par un organisme
d'âge i est $r_i \in \mathbb{N}$

organisme
d'âge i



r_i nouveaux
organismes

$q_i(K) := \# \text{ organismes d'âge } i \text{ en temps } K, K \in \mathbb{N}$
(aussi mesure en jours)

On veut exprimer

$q_i(K+1)$ en fonction de $q_1(K), \dots, q_3(K)$
(pour $1 \leq i \leq 3$)

$$(A) \quad q_1(K+1) = r_1 \cdot q_1(K) + r_2 \cdot q_2(K) + r_3 \cdot q_3(K)$$

$$(B) \quad q_2(K+1) = p_{2 \leftarrow 1} \cdot q_1(K)$$

$$(C) \quad q_3(K+1) = p_{3 \leftarrow 2} \cdot q_2(K)$$

(*)

Alors, si l'on pose

$$\bar{q}(k) = \begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{pmatrix}$$

(*) devient

$$\bar{q}(k+1) =$$

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & 0 \end{pmatrix} \bar{q}(k)$$

L
matrice
de
Leslie

Problème

On veut calculer $\bar{q}(k)$ pour $k \gg 1$
étant donné $\bar{q}(0)$

Comment faire?

On va faire un exemple guidé:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On veut calculer $\vec{q}(k)$

Première idée

$$\vec{q}(1) = L \cdot \vec{q}(0)$$

$$\vec{q}(2) = L \cdot \vec{q}(1) = L \cdot (L \cdot \vec{q}(0))$$

$$\vec{q}(3) = L \cdot \vec{q}(2) = L (L (L \vec{q}(0)))$$

$$\Rightarrow \vec{q}(k) = L^k \cdot \vec{q}(0)$$

Slogan

Pour calculer L^k on doit calculer les valeurs et vecteurs propres de L !

① Calcul de valeurs propres : $\rightarrow$ racines de $\det(L - \lambda \cdot I_3)$

$$\det(L - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 7 & 6 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{dev. 1ère ligne}}{=} (-\lambda)(-\lambda)^2 - 7 \cdot (-\lambda) + 6 \cdot 1$$
$$= -\lambda^3 + 7\lambda + 6$$

Critère de Gauss

$\rightarrow$

chercher des diviseurs de 6 !

$\Rightarrow$ Les racines sont $-1, -2$ et 3 .

② Calcul de vecteurs propres : $\rightarrow \text{Ker}(L - \lambda \cdot I_3)$

$$\lambda = -1 \longrightarrow \mathbb{E}_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = -2 \longrightarrow \mathbb{E}_{-2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 3 \longrightarrow \mathbb{E}_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\} \quad (\text{base de vecteurs propres})$$

$$\Rightarrow [\mathbf{T}_L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Changement

$\Rightarrow$
de
base

$$L = [\mathbf{T}_L]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} =$$

$$= \underbrace{P}_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [\mathbf{T}_L]_{\mathcal{B}} \cdot \underbrace{P^{-1}}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = P \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot P^{-1}$$

$$L^k = (P \cdot \textcircled{1} \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot \textcircled{1} \cdot P^{-1}) \cdot \dots \cdot (P \cdot \textcircled{1} \cdot P^{-1})$$

$$= P \cdot \textcircled{1}^k \cdot P^{-1}$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \quad \leftarrow P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\vec{q}(k) = \begin{pmatrix} (-2)^{k+2} & (-1)^{k+2} & 3^{k+2} \\ (-2)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 3^{k+1} \\ (-2)^k & (-1)^k & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/4 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/4 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^{k+2} & (-1)^{k+2} & 3^{k+2} \\ (-2)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 3^{k+1} \\ (-2)^k & (-1)^k & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \cdot (-2)^{k+2} + 7 \cdot (-1)^{k+2} + 3^{k+2} \\ -4 \cdot (-2)^{k+1} + 7 \cdot (-1)^{k+1} + 3^{k+1} \\ -4 \cdot (-2)^k + 7 \cdot (-1)^k + 3^k = 2k \end{pmatrix}$$

Avec l'ordinateur

k	2k
1	1
2	0
3	13
4	6
5	91
6	120
...	...

- Dans cette séance on va voir:
- (i) notion de matrice diagonalisable $\longrightarrow$ diagonalisation
 - (ii) application aux puissances d'une matrice
- 19.11

Déf (trace d'une matrice)

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} := a_{1,1} + \dots + a_{n,n}$$

(par les exos de la série 11)

Déf. 11.4 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1} A P$ est matrice diagonale.

$$\boxed{A = P D P^{-1}}$$

+ deuxième

Première caractérisation
de matrices diagonalisables

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

A diagonalisable $\iff \text{Eq (i)}$

A possède n vecteurs propres qui forment une base de $\mathbb{R}^n$

Dans ce cas : si $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres ($\bar{v}_i$ est vecteur propre de valeur propre $d_i \in \mathbb{R}$), alors

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \boxed{\bar{v}_1} & \dots & \boxed{\bar{v}_n} \end{bmatrix} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$$

| $\xLeftrightarrow{\text{Eq (ii)}} \text{DP}$ Lorsque'on fait DP , $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Procédure usuelle:

① On calcule les valeurs propres de $A = \text{racines de } P_A(\lambda) \rightsquigarrow \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

DP

② Pour chaque λ_i on calcule une base de $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i I_n) \rightsquigarrow \mathcal{B}_i = \{\bar{v}_{i,1}, \dots, \bar{v}_{i,m_i}\}$

| $\xLeftrightarrow{\text{Eq (iii)}} \text{mult}_A(\lambda_i) = \text{mult}_g(\lambda_i), \forall \lambda_i \text{ valeur propre de } A$
(si toutes les racines de P_A sont réelles)

Deux propriétés importantes:

① Si A et B sont semblables, i.e. $B = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors $\rho_A = \rho_B$ [THM. 10.21]

② Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres différentes de A ,
 $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ des vecteurs propres de A

$(A \cdot \bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i, \forall i)$. Alors $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ est libre.

Application Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, i.e. $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, alors

$$A^N = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}_{N \text{ facteurs "PDP}^{-1}"}$$

$$= P \cdot \underbrace{D \cdots D}_{N \text{ facteurs}} \cdot P^{-1} = P \cdot D^N \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} d_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^N \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$$

calculer A^{10000}

↳ On commence par diagonaliser A ?

① $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9-\lambda & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 7/9-\lambda & -8/9 \\ -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \left[\left(\frac{7}{9}-\lambda\right)\left(-\frac{7}{9}-\lambda\right) - \frac{32}{81} \right]$$
$$= -(\lambda-1) \left[\lambda^2 - \frac{49}{81} - \frac{32}{81} \right] = -(\lambda-1)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

↳ deux valeurs propres: $\begin{cases} \lambda = -1 \text{ et } \text{mult}_A(-1) = 1 \\ \lambda = 1 \text{ et } \text{mult}_A(1) = 2 \end{cases}$

$$\textcircled{2} \quad F_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_3}$

$$\Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{10000} = P \cdot D^{10000} \cdot P^{-1}$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{10000} & & \\ & 1^{10000} & \\ & & 1^{10000} \end{pmatrix} P^{-1} \cdot D =$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} ? & & \\ & ? & \\ & & ? \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette séance on va voir

21.11

- diagonalisation dans le cas complexe *

- la notion de norme euclidienne, produit scalaire euclidien, orthogonalité, ...

↑ NOUVELLE PARTIE

La théorie de valeurs propres et vecteurs propres pour $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$ est essentiellement la même $\rightarrow$ elle permet de faire plus de calculs $\mathbb{R} \rightarrow$ on peut calculer de racines de polynômes dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$!!!

[Exemple]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres, vecteurs propres dans $\mathbb{C}$ et montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (pas dans $\mathbb{R}$!).

① Pour les vl. propres $\xrightarrow{\text{racines de}}$ $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix}$

racines de $P_A(\lambda)$:

$$\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$= (2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2 - \lambda) \left[\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]$$

$$= (2 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda + 1)$$

② Calcul de vecteurs propres

$$\vec{F}_2 = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} \right\}$$

$$, \vec{F}_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exprimer

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

↑ diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

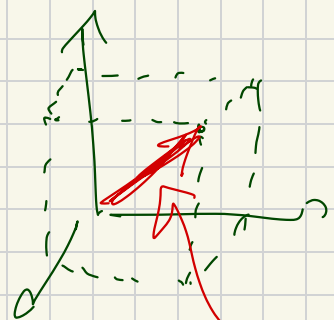
calcul
avec
G-J

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 12

Produit scalaire euclidien

Def. 12.1 (norme euclidienne)



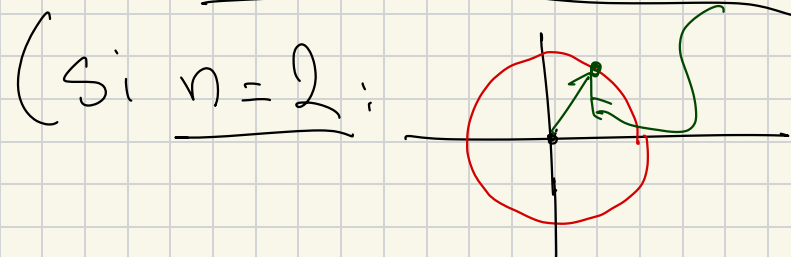
= longueur d'un
vecteur

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

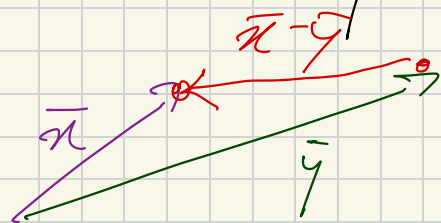
→ Vecteur normalisé

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\vec{x}\| = 1$$



Def. 12.3 (distance) F.d. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, la distance

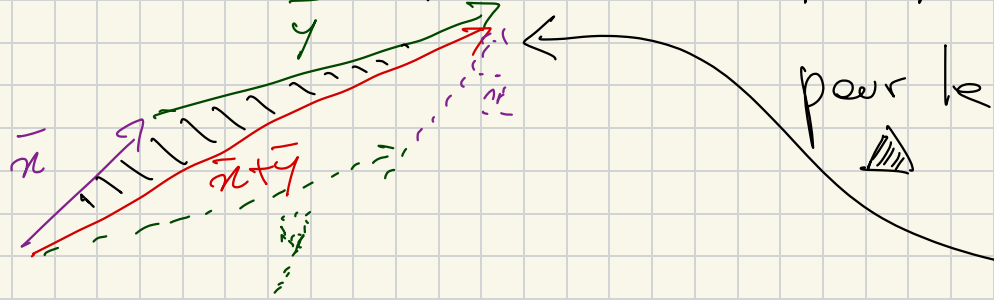
entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est



$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

(PROP) (Nor.1) $\| \lambda \cdot \vec{x} \| = |\lambda| \cdot \| \vec{x} \|, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
 (Nor.2) $\| \vec{x} \| \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\| \vec{x} \| = 0$ ss: $\vec{x} = \vec{0}$
 (Prop.13) (Nor.3) $\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (inég. triangulaire)



pour le

Déf. 12.6 (produit scalaire euclidien)

En fait

angle entre
 $\vec{x}$ et $\vec{y}$

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \| \cdot \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \bullet \vec{y} &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ &= (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \vec{x}^T \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

produit de matrices

Déf. Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux
 (ou perpendiculaires) si $\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$

Notation: $\vec{x} \perp \vec{y}$

PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE (Prop. 14)

$$(PS.1) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} \quad (\text{symétrie})$$

$$(PS.2) \quad \left. \begin{aligned} (\vec{x} + \lambda \vec{x}') \cdot \vec{y} &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda \vec{x}' \cdot \vec{y} \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \lambda \vec{y}') &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda \vec{x} \cdot \vec{y}' \end{aligned} \right\} (\text{bilinearité})$$

$$(PS.3) \quad \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \text{ ssi } \vec{x} = \vec{0}$$

$$(NRM) \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \quad (\text{ou } \|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x})$$

$$(CS) \quad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad \hookrightarrow \text{inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

← "même" que (Nor.3)

But: preuve de (CS) $t \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$0 \leq \|\vec{x} + t\vec{y}\|^2 \quad \hookrightarrow \text{voir les notes manuscrites.}$$

Dans cette séance on va voir

26.11

- (i) familles orthogonales et orthormes $\longrightarrow$ base orthogonale et orthormes (orthonormale)
- (ii) complément orthogonal $\longrightarrow$ lien avec $\text{Col}(A)$ et $\text{Lgn}(A)$
- (iii) définition du produit scalaire abstrait.

Motivation

$\longrightarrow$ pourquoi parler de distances et d'angles

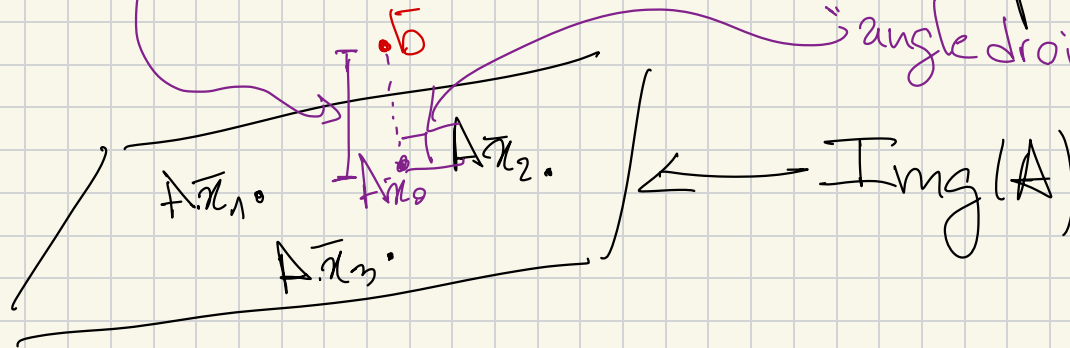
??

Souvent, on a un SEL $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ incompatible (orthogonalité)

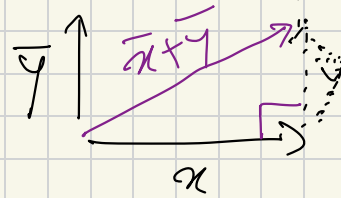
Dans ce cas, on veut trouver $\vec{x}_0$ tel que

$\text{dist}(A\vec{x}_0, \vec{b}) := \|A\vec{x}_0 - \vec{b}\|$ soit le plus petit possible.

Alors:



Fait! $\bar{x} \perp \bar{y}$ (i.e. $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$) $\Leftrightarrow \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$
 (identité pythagoricienne)



Déf. 12.12 Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ SEV, on définit le complément orthogonal de W par

$$W^\perp := \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^n : \bar{v} \cdot \bar{w} = 0, \forall \bar{w} \in W \}$$

Exemple 12.13*

$$W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow W^\perp = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W^\perp \stackrel{\text{dét}}{\Leftrightarrow} \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\lambda(x+y)} = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{x} = -y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow W^\perp = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Lemme 16 Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un SEU et $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$ base de W .
Alors $\bar{v} \in W^\perp$ ssi $\bar{v} \cdot \bar{w}_1 = \dots = \bar{v} \cdot \bar{w}_k = 0$

Calcul de $W^\perp$: (1) Calculer une base de $W \rightsquigarrow \mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$
(2) $W^\perp = \text{Ker}([\bar{w}_1 \dots \bar{w}_k]^T)$

Dans l'exemple précédent $W^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

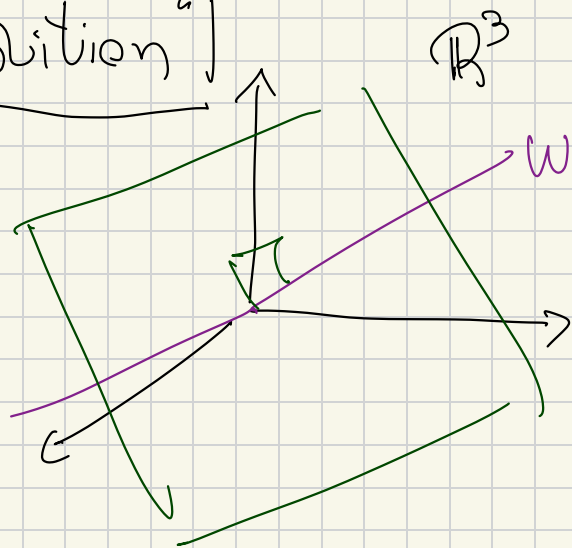
PROPRIÉTÉS DE $W^\perp$ (Proposition 15) Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ SEU :

(1) $W^\perp$ est SEU de $\mathbb{R}^n$

(2) $(W^\perp)^\perp = W$

(3) $\dim W + \dim W^\perp = n \leftarrow (\text{exo de la feuille 12})$

"Intuition"



$$W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \right\}$$

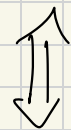
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{var liée } x} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{var libres } y, z}$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$x+y+z=0 \iff x = -y-z$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple Soit $W = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Calculer une base de $W^\perp$.

$$[\bar{w}_1, \bar{w}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow [\bar{w}_1, \bar{w}_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{F.F.R.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

var liées var libre

Cas intéressant $\rightarrow \text{Col}(A)$ et $\text{Lgn}(A)$

Thm 12.18 Pour A matrice : (a) $\text{Lgn}(A)^\perp = \text{Ker}(A)$, (b) $\text{Col}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$

Def 12.19

$\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite

- orthogonale si $\bar{w}_i \perp \bar{w}_j, \forall i \neq j$;
- orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et $\|\bar{w}_i\| = 1, \forall i$

Une base est orthogonale (resp. orthonormée) si elle est orthogonale (resp. orthonormée) comme famille.

Prop. 12.21

$\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ orthogonale et $\bar{w}_i \neq 0, \forall i$

Normalisation

$\left\{ \frac{\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|}, \dots, \frac{\bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|} \right\}$
orthonormée

Deux propriétés importantes:

(Lemme 17) (i) Si $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ orthogonale et $\bar{w}_i \neq 0, \forall i$ $\Rightarrow \mathcal{F}$ libre

(Thm 12.23) (ii) Si $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ base orthogonale de $W \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\forall \bar{w} \in W$

$$[\bar{w}]_B = \begin{pmatrix} \frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|^2} \end{pmatrix}$$

BO = base orthogonale
 BON = base orthonormée

Définition du produit scalaire abstrait

Soit V un EV. Un produit scalaire sur V est une application qui associe un nombre réel $(u|v)$ à toute paire $u, v \in V$ telle que

(PS.1) $(u|v) = (v|u)$, $\forall u, v \in V$

(PS.2) $(u + \lambda u' | v) = (u|v) + \lambda(u'|v)$ et $(u | v + \mu v') = (u|v) + \mu(u|v')$ $\forall u, u', v, v' \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(PS.3) $(u|u) \geq 0$, $\forall u \in V$ et $(u|u) = 0$ ssi $u = 0_V$

Exemple Si $V = \mathbb{R}^n$ et $(\bar{u}|\bar{v}) := \bar{u} \cdot \bar{v}$ est un produit scalaire abstrait.

Exemple Pour $V = \mathbb{P}_2$ et

évaluation de p en 1?

$$(p | q) = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$$

évaluation de p en 0?

Vérifier les axiomes! $\rightarrow$ Voir le détail dans les notes manuscrites.

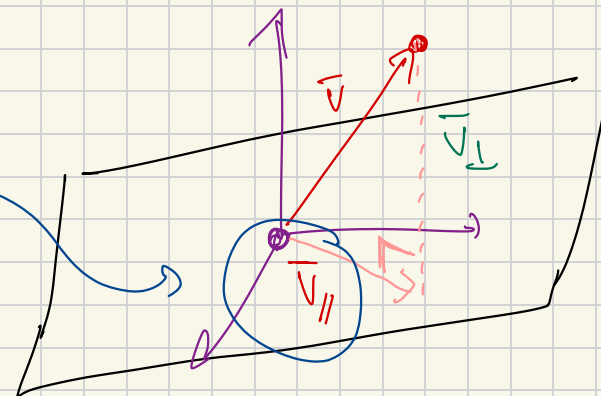
Dans cette séance on va voir

- (i) notion et calcul de la projection orthogonale
- (ii) la méthode Gram-Schmidt

28.11

Idee $\left\{ \begin{array}{l} W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ SEV} \\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$

projection
orthogonale de
 $\vec{v}$ sur W



on veut
 $\vec{v}_\perp \in W^\perp$
 $\vec{v}_\parallel \in W$
tels que
 $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$

[Thm. 12.32] Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ SEV, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, il existe une paire unique $\bar{v}_{||} \in W$ et $\bar{v}_\perp \in W^\perp$ telle que $\bar{v} = \underbrace{\bar{v}_{||}}_{=:\text{proj}_W(\bar{v})} + \bar{v}_\perp$

En plus, $\text{proj}_W(\bar{v})$ est l'unique vecteur de W qui satisfait

projection orthogonale de $\bar{v}$ sur W .

$\|\bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v})\| = \min_{\bar{w} \in W} \|\bar{v} - \bar{w}\|$

$$\| \bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}) \| \leq \| \bar{v} - \bar{w} \|, \forall \bar{w} \in W$$

$\text{proj}_W(\bar{v})$ est le vecteur de W le plus proche de $\bar{v}$

||| $\text{proj}_W(\bar{v})$ est la meilleure approximation de $\bar{v}$ avec des éléments de W

Tout ça sert à prouver des résultats sur la proj. orthogonale
mais pas pour faire des calculs !!!

Row calculator $\text{proj}_W(\vec{v}) \rightarrow$ il faut une BO de W!

[Thm 12.33] Si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ on SEV, $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ BO de W
et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2} \bar{w}_1 + \dots + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|^2} \bar{w}_n.$$

[Exemple/Exercice]

$W = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2} \right\} \leftarrow \text{BO de } W$

Calculer $\text{proj}_W(\bar{v}) = \underbrace{-\frac{11}{30}}_{\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\|\bar{w}_2\|^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Pour calculer $\text{proj}_W(\bar{v})$ on a besoin d'une BO de W !
Comment la trouver ?? $\longrightarrow$ Procédé de Gram-Schmidt
(GS)

~~Pour W SEV de $\mathbb{R}^n$~~

Input $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$ base de W

Output $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ B.O. de W

B.O.N

$\mathcal{B}' = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$
de W

Méthode de GS

$$\begin{cases} \bar{v}_1 := \bar{w}_1 \\ \bar{v}_2 := \bar{w}_2 - \underbrace{\frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1}_{\text{Proj}_{\text{vect}\{\bar{v}_1\}}(\bar{w}_2)} \\ \bar{v}_3 := \bar{w}_3 - \underbrace{\frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1}_{\text{Proj}_{\text{vect}\{\bar{v}_1\}}(\bar{w}_3)} - \underbrace{\frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2}_{\text{Proj}_{\text{vect}\{\bar{v}_2\}}(\bar{w}_3)} \vdots \\ \vdots \\ \bar{v}_k := \bar{w}_k - \frac{\bar{w}_k \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\bar{w}_k \cdot \bar{v}_{k-1}}{\|\bar{v}_{k-1}\|^2} \bar{v}_{k-1} \end{cases}$$

Normalisation

$$\bar{u}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$$

$$\bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|}$$

$\vdots$

$$\bar{u}_k := \frac{\bar{v}_k}{\|\bar{v}_k\|}$$

Exemple / Exercice (12.44)

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_3} \right\} \rightsquigarrow W = \text{Vect} \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \} \leftarrow \begin{matrix} B \text{ base} \\ \text{de} \\ W \end{matrix}$$

Construire une BD de W via GS. (et BON aussi)

→ voir le résultat dans les notes.

Dans cette séance on verra:

03.12

- (i) la décomposition QR d'une matrice $\leftarrow$ application de GS
- (ii) la méthode des moindres carrés $\rightarrow$ 3 façons de calculer

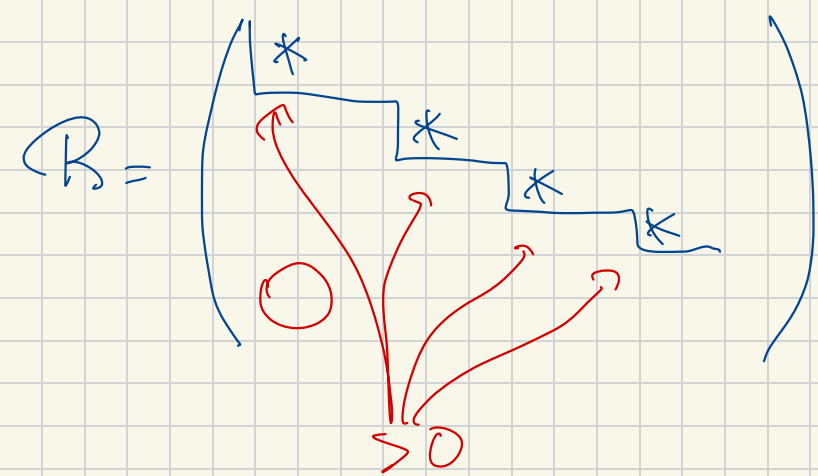
§ Décomposition QR (section 12.8 des notes de Sach2)

But

é.d. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
(avec $\text{rang}(A) = n$)

$\xrightarrow{\text{on veut}}$

- $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $Q^T Q = \underline{I_n}$
- $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ triangulaire sup. t.q. le premier coeff.



non nul de chaque ligne non nulle est positif.
t.g. $A = Q \cdot R$

Def. 14.3 Une matrice $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $Q^T \cdot Q = I_n$

Fait $[\bar{q}_1 \dots \bar{q}_n] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale ss $\{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n\}$ est orthonormée.

On définit, é.d. $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang n ,

(*) $Q := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n]$ où $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ est BON
obtenue de $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ par GS.
 $R := Q^T \cdot A$

Thm 12.45 Les deux matrices dans (*) satisfont

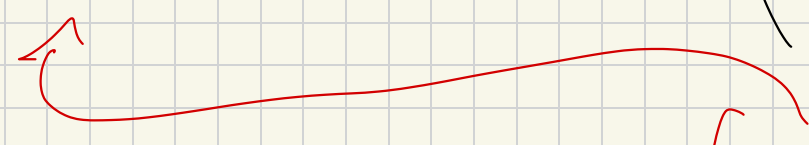
- Q est orthogonale
- R est triangulaire sup dont le premier coeff. non nul de chaque ligne non nulle est positif.

- $A = Q \cdot R$

Les matrices Q et R qui satisfont à ces conditions sont uniques.

Exemple / Exercice 12.46 On veut calculer la décomposition

QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow[\text{BON}]{\text{GS}} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{4}/6 \\ \sqrt{4}/6 \\ 2\sqrt{4}/3 \end{pmatrix} \right\} ? \longrightarrow Q := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{4}/6 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{4}/6 \\ 0 & 2\sqrt{4}/3 \end{pmatrix}$$


$$\begin{cases} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{3 \\ 2}}}{\underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Norm $\rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B := Q^T \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \square$$

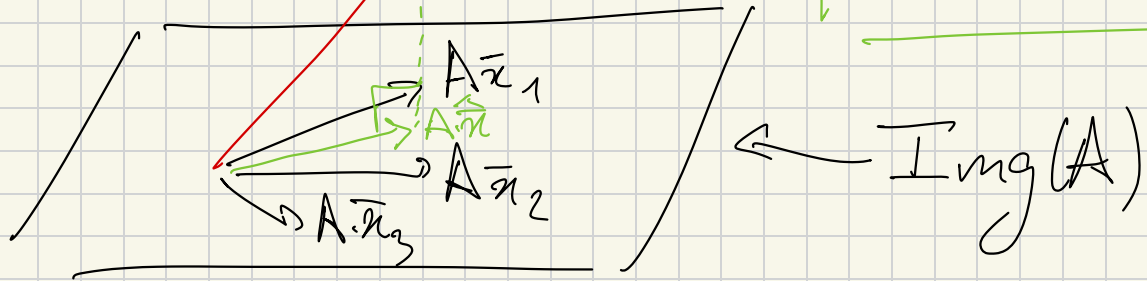
Chapitre 13 : Méthode des moindres carrés

Motivation Souvent on veut résoudre $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ mais il est incompatible

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$

Qu'est-ce qu'on fait? $\rightarrow$ On veut calculer le $\hat{\bar{x}}$ le plus proche d'être une sol. de $(*)$:

$$\|A\hat{x} - b\| \leq \|A\bar{x} - b\| \text{ pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$



Déf. 13.3] Pour un SFL (*) $A\bar{x} = \bar{b}$, une pseudo-solution de (*) ou une solution de (*) au sens des moindres carrés (MC) est un vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

(MC) $\|A\hat{x} - b\| \leq \|A\bar{x} - b\|$ par tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|A\hat{x} - b\|^2 \leq \|A\bar{x} - b\|^2$$

$$\sum_{j=1}^m ((A\hat{x})_j - b_j)^2 \leq \sum_{j=1}^m ((A\bar{x})_j - b_j)^2$$

moindres carrés

Méthodes pour calculer la sol. au sens des MC

Méthode 1

$\hat{x}$ est sol. de (*) au sens de MC

$\hat{x}$ est sol. de



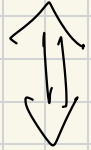
$$A \cdot \bar{x} = \text{pr}_{\text{Im}(A)}(b)$$

compatible !!

pas trop utile par les calculs !!

Méthode 2

$\hat{x}$ est sol. de (*) au sens de MC



(Thm 13.6)

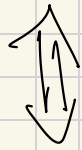
$\hat{x}$ est sol. de

$$A^T \cdot A \cdot \bar{x} = A^T \cdot b \quad (\text{équation normale})$$

compatible !!

Méthode 3

$\hat{x}$ est sol. de (*) au sens de MC



(Thm 13.11)

$\hat{x}$ est sol. de

$$R \cdot \bar{x} = Q^T \cdot b$$

compatible !!

$$\leftarrow A = Q \cdot R \text{ décomp. QR}$$

Exemple / Exercice 13.7

Trouver une sol de

avec EN:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

zusens des MC.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6878} \begin{pmatrix} 3 & -79 \\ -79 & 4373 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6313}{3439} \\ \frac{96268}{3439} \end{pmatrix}$$

Exemple / Exercice 13.13

Calculer la sol. zusens des MC de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \text{ avec m\u00e9thode 3}$$

$$\begin{cases} Q = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{bmatrix} \\ R := Q^T A \end{cases}$$

BDN à partir de GS sur $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

→ voir les solutions dans les notes
manuscrites

Dans cette séance on va voir :

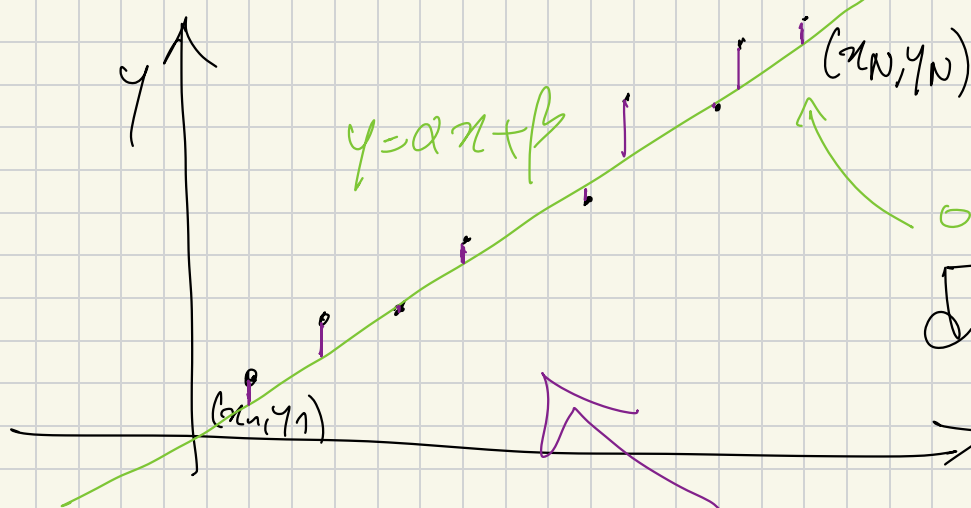
GS.12

(i) la droite de régression → application de la méthode des MC

(ii) la diagonalisation de matrices symétriques ← diagonalisation + GS

Application de la méthode des MC

Imaginons que l'on a une collection de points $\mathcal{P} = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\} \subseteq \mathbb{R}^2$



on aimerait trouver la meilleure droite, qui approxime le mieux les points dans $\mathcal{P}: (*) y = \alpha x + \beta$

↑ inconnues !!

Pour nous, ça veut dire que les différences dans

Valeur prédite par (*)	Valeur réelle
$\alpha x_1 + \beta$	y_1
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha x_N + \beta$	y_N

soient les plus petites possibles.

erreur d'approximation quadratique

$$\rightarrow \mathcal{E}^2 := (\alpha x_1 + \beta - y_1)^2 + \dots + (\alpha x_N + \beta - y_N)^2$$

on veut $\mathcal{E}^2$ le plus petit possible

= somme des carrés des longueurs de barres verticales

$$\frac{\text{Obs.}}{\varepsilon} = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \right\|^2$$

Alors trouver $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ qui minimisent ε^2 est équivalent à trouver une sol de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{au sein des MC} \\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Exemple / Exercice | Calculer la droite de régression de
 $S = \{(0, 6), (1, 0), (2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sol: $y = -3x + 5$

Solve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← incompatible
 au sens des MC

$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\bar{n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_b$

On veut résoudre l'EN:

$\underbrace{A^T A \cdot \bar{n} = A^T \cdot b}_{\text{SBL compatible}}$ ←

$A^T A$ $A^T \cdot b$

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

→ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$y = -3x + 5$ ←
 droite de régression

[Exercice] Calculer la droite de régression de
 $S = \{(-6, -1), (-2, 2), (1, 1), (7, 6)\}$

Chapitre 14 : Diagonalisation de matrices symétriques

[Rappel] $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique si $A = A^T$
 $M \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale si $M^T M = I_n$

[Rk] M orthogonale + carrée $\Rightarrow$ inversible et $M^T = M^{-1}$

[Lemme 2.1] Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $(A^T \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

En conséquence, A symétrique ssi $(A \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

[Corollaire 7] Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors
 $(M \vec{x}) \cdot (M \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Théorème spectral

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

(Thm 14.9)

A symétrique $\iff \exists Q \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale
telle que $Q^T A Q$ est
diagonale

$\Leftarrow$ C'est pas difficile, $\Rightarrow$ Omise $\leftarrow$ Omets la preuve en tout cas

On dit dans ce cas que A est orthogonalement diagonalisable.

$\iff$ Une BON de $\mathbb{R}^n$
formée de vecteurs
propres de A

Notre but: pour A symétrique, calculer la BON de $\mathbb{R}^n$
formée de vecteurs propres de A . $\underbrace{\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}}$

①

$$Q := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$$

② Si λ_i est la valeur propre de A associée à $\bar{v}_i$, alors

$$Q^T A \cdot Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D \Rightarrow A = Q D Q^T$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow A = Q D Q^T = \lambda_1 \vec{v}_1 \vec{v}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \vec{v}_n^T$$

(Décomposition spectrale de A)

Comment calcule-t-on Q et D?

① Calculer racines de $\det(A - \lambda \cdot I_n)$

② Calculer une base B_λ de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ pour λ valeur propre.

③ Appliquer GS à $B_\lambda \rightsquigarrow B'_\lambda$ BON de E_λ

l'union des B'_λ donne la BON de vecteurs propres.

Exemple/Exercice
14.4

Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ calculer la
décomposition spectrale.
→ Voir la solution dans les notes.

Dans cette séance on va voir

10.12

- (i) un résultat sur les matrices symétriques ← pour mieux comprendre le thm. spectral
- (ii) la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (SVD)

Orthogonalité des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes

Corollaire Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors, $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$ (i.e. $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$)

(Preuve) On a vu que
(Lemme 21, feuille 72).

$$\bar{w} \cdot (A\bar{v}) = (A^T \bar{w}) \cdot \bar{v}, \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$$

$$= (A\bar{w}) \cdot \bar{v}$$

↑ si A symétrique

$$\Rightarrow \underset{\substack{\bar{v}_2 \\ \text{v.p.}}}{v_1} \cdot (A\bar{v}_2) = (A\bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2$$

|| $\longleftarrow$ $\bar{v}_1$ v.p.

$$\lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \cdot \lambda_2 \bar{v}_2$$

↑ (PS.2)

$$\lambda_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 - \lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}_{\neq 0} = 0$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}_{=0}$$

$\Rightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$ □

Chapitre 15 ISVD

Objectif e.d. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{on veut}}$

- $U \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ orthogonale (i.e. $U^T U = I_m$)
- $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ diagonale et non négative (i.e. $\Sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\Sigma_{ij} \geq 0, \forall i, j$)
- $V \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale

telles que $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ (SVD)

[Rk] Si $m=4, n=2$ par exemple $\rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} * \geq 0 & 0 \\ 0 & * \geq 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

[Thm 15.5] La SVD existe toujours mais elle n'est pas forcément unique. $\rightarrow$ Mais $\{\Sigma_{i,i}\}$ est unique

[Terminologie]

- $U = [\underbrace{\bar{u}_1 \dots \bar{u}_m}_{\text{vecteurs singuliers à gauche de } A}]$
- $\Sigma_{i,i} \leftarrow \text{valeurs singulières de } A$
- $V = [\underbrace{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n}_{\text{vecteurs singuliers à droite de } A}]$

① Calcul de Σ

① i Calculer les valeurs propres de $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$
 $\hookrightarrow$ on les écrit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ (Lemme 23)
 (on répète chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité algébrique)

① ii Garder les valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ de $A^T A$
 et on pose $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} > 0$ ($1 \leq i \leq l$)

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_l & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{m lignes} \\ \text{n colonnes} \end{matrix}$$

Proposition:
 $l = \text{rang}(A)$

Exemple/Exercice 15.9

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Calculer Σ dans la SVD

(i) On note que $A^T A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 153 & 96 \\ 96 & 97 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(A^T A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \text{Tr}(A^T A) \lambda + \det(A^T A)$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{2} \lambda + \frac{9}{16} = \left(\lambda - \frac{9}{4}\right) \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{Tr}(B)} \lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{\det(B)}$$

$(B - \lambda I_2)$

(ii) $\lambda_1 = \frac{9}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) Calcul de V

On calcule une BON de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs propres de $A^T A$: $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

$$\Rightarrow V_0 = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$$

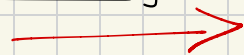
Exemple (suite) Calculer V .

Pour $\boxed{\lambda = \frac{9}{4}}$ $\rightarrow \mathbb{E}_{9/4} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -72/100 & 96/100 \\ 96/100 & -128/100 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -18/25 & 24/25 \\ 24/25 & -32/25 \end{pmatrix}$

$\downarrow$
 $\bar{v}_1$

$= \text{Ker} \begin{pmatrix} -18/25 & 24/25 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{4}} \rightsquigarrow \bar{v}_2$



voir les notes
manuscrites

$\rightsquigarrow V = \begin{pmatrix} \boxed{4/5} & \boxed{-3/5} \\ \boxed{3/5} & \boxed{4/5} \end{pmatrix}$

$\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$

Dans cette séance on va voir comment calculer U
dans la SVD (2 méthodes)

12.12

③ Calcul de U

Méthode 1

→ Complétion + GS

③ (i) $\bar{u}_j := \frac{A \cdot \bar{v}_j}{\sigma_j}, 1 \leq j \leq l$

(ii) Si $l < m$, on complète $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l\} \subseteq \mathbb{R}^m$ en une
base $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l, \bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$ et
on applique GS pour obtenir une BON
 $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l, \bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$.

$$U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_l \bar{u}_{l+1} \dots \bar{u}_m]$$

Exemple 15.9 (find) Calculer U

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{A \cdot \bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 9/10\sqrt{2} & 13/10\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}}{3/2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \bar{u}_2 &= \frac{A \cdot \bar{v}_2}{4/2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 9/10\sqrt{2} & 13/10\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Fait remarquable: $\sigma_j = \|A \bar{v}_j\|, 1 \leq j \leq l$

Méthode 2 $\rightarrow$ Méthode directe: BON de $\ker(A^T)$

(3) (i) $\bar{u}_j := \frac{A \bar{v}_j}{\sigma_j}, 1 \leq j \leq l$

(3) (ii) Si $\boxed{l < m}$, on calcule une base $\text{Ker}(A^T)$ $\{\bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ et on applique GS pour obtenir une BON $\{\bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_m\}$ de $\text{Ker}(A^T)$.

$$U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_l \quad \bar{u}_{l+1} \dots \bar{u}_m]$$

Exemple / Exercice 14.14

Calculer la $\overbrace{\text{SVD}}^{n=2}$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{matrix} m=3 \end{matrix} \right]$

$$\textcircled{1} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A^T A - \lambda I_2) = \lambda(\lambda - 4)$$

 $\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 4 \geq \lambda_2 = 0$$

 $\Rightarrow$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2$$

$$|\lambda = 1| = \text{rang}(A)$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{3 lignes} \\ \text{2 col.} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Pour } \boxed{\lambda_1 = 4} \longrightarrow \text{Ker}(A^T A - 4 \cdot I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\bar{v}_1} \right\}$$

$$\text{Pour } \lambda_2 = 0 \rightsquigarrow \text{Ker}(A^T A) = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\bar{v}_2} \right\}$$

$$\Rightarrow V = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \bar{\mu}_1 = \frac{A \cdot \bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(A^T) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

BON.

$$\Rightarrow U := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple / Exercice 14.16

Calculer la SVD de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad m=2$$

$n=3$
Valeurs propres de $A^T A$:

$$\boxed{\lambda_1 = 12} \geq \boxed{\lambda_2 = 10} \geq \boxed{\lambda_3 = 0}$$

$$\textcircled{1} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

(2)

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\bar{v}_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\bar{v}_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\bar{v}_3}$

(3)

$$\bar{u}_1 = \frac{A\bar{v}_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{A\bar{v}_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

